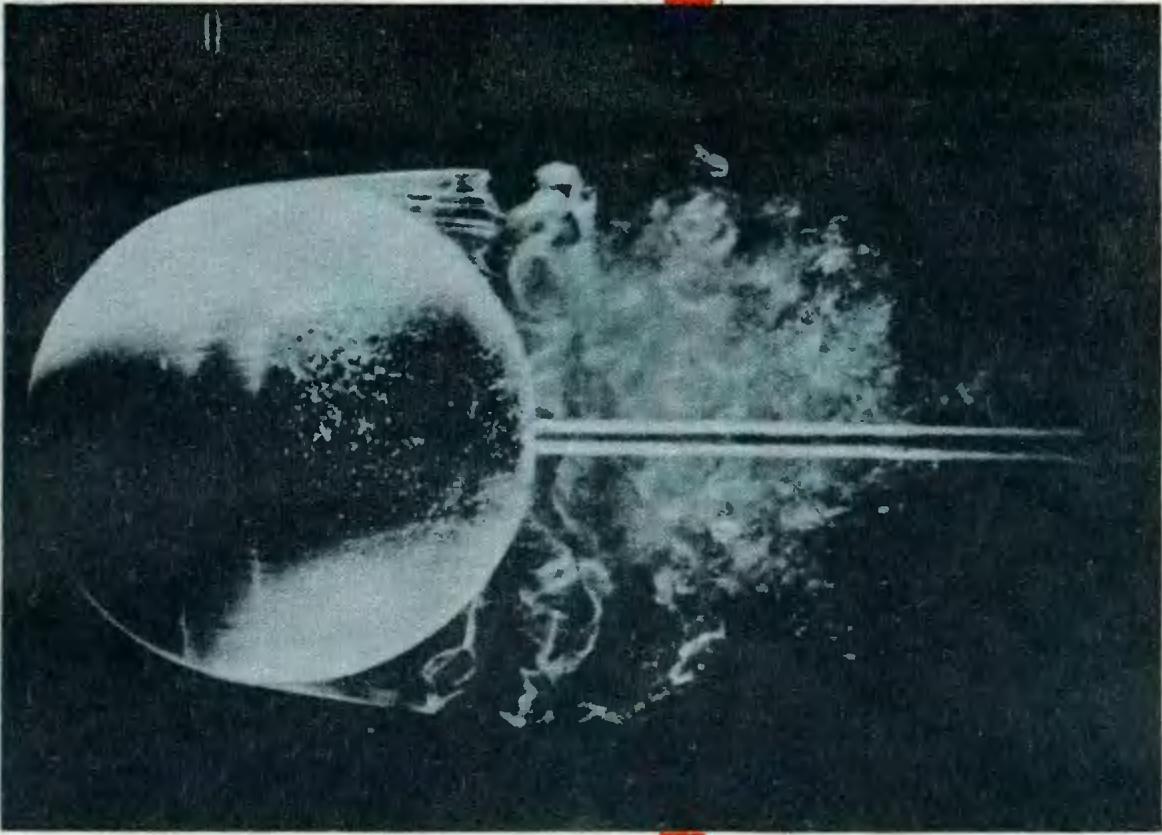


Квант

Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Из «золотого фонда» гидродинамики

1989



Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Москва, «Наука»
Главная редакция физико-
математической
литературы

В номере:

- 2 *И. М. Соколов.* Вечная электрическая лампочка?
- 8 *В. Ю. Овсиенко.* О великом числе Деногардуса и законе Гука
- 17 *В. А. Бронштэн.* Трудная задача
- 22 Удивительные приключения периодических дробей
- Задачник «Кванта»
- 31 Задачи M1176—M1180, Ф1183—Ф1187
- 32 Решения задач M1151—M1154, Ф1163—Ф1167
- 40 Калейдоскоп «Кванта»
- «Квант» для младших школьников
- 43 Задачи
- 44 *Я. И. Перельман.* Награда
- Математический кружок
- 47 *Д. В. Фокин.* Криминальная геометрия, или Дело принципа
- Лаборатория «Кванта»
- 52 *С. К. Бетяев.* Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики
- Р — значит ракета
- 57 *В. С. Авдучевский, Л. В. Лесков.* XXI век: энергия из космоса?
- Информация
- 62 Школа космонавтики
- 76 XII Турнир юных физиков
- 78 Вечерняя физическая школа при МГУ
- Игры и головоломки
- 65 Амбиграммы
- Практикум абитуриента
- 67 *А. В. Коржуев.* Мощность в цепи постоянного тока
- Вузы мира
- 71 Задачи вступительного экзамена по математике в Оксфордский университет
- 79 Ответы, указания, решения
«Квант» улыбается (21)
Нам пишут (42, 70, 75)
Смесь (56, 66)
- Наша обложка
- 1 Фотография обтекания шара водой — прекрасная иллюстрация к одному из «Десяти опытов из «золотого фонда» гидродинамики».
- 2 Картина югославского примитивиста *И. Рабузина* «Мой сын». Окажись этот «богатырь» на месте полководца Теренция (см. статью *Я. И. Перельмана* «Награда»), пришлось бы скупому императору раскошелиться...
- 3 Шахматная страничка.
- 4 Оригами: модель октаэдра.

ВЕЧНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЛАМПОЧКА?

Кандидат физико-математических наук
И. М. СОКОЛОВ

Давайте поговорим об обыкновенной электрической лампочке, о физических законах, управляющих ее поведением, и о свойствах самой лампочки как технической системы.

Несколько лет назад в магазинах появились лампочки, рассчитанные не на 220 В, а на 235 В. Эти лампочки служат гораздо дольше обычных. Причиной, непосредственно вызвавшей их появление, был дефицит лампочек в магазинах. Производители лампочек здраво (со своей точки зрения) рассудили, что чем дольше служат лампочки, тем реже их будут покупать и тем меньше их нужно будет производить.

Проблема удлинения срока службы лампы была решена очень просто — небольшим удлинением нити накаливания. Однако люди, знающие физику, говорили: это расточительство, нельзя так разбазаривать электроэнергию. Почему они так говорили, мы поймем чуть позже.

Летом 1986 года в «Литературной газете» появилась статья об изобретателе, придумавшем вечную лампочку. Она устроена очень просто. Последовательно с обычной лампочкой включен диод (рис. 1), который отсекает, скажем, отрицательные полупериоды тока. Лампочка работает при эффективном значении напряжения в $\sqrt{2}$ раз меньшем, чем напряжение в сети. Идея здесь та же самая: при пониженном напряжении лампочка служит дольше. Мы увидим, что такая лампочка действительно является практически вечной. По каким-то формальным причинам изобретателю отказали в выдаче авторского свидетельства. Но и в этом случае те, кто знает физику, понимали, что огорчаться не стоит: внедрение вечных

лампочек не приведет ни к чему хорошему.

И вот, наконец, маленькая заметка из газеты «Известия» от 25 декабря 1987 года. Это заметка о коллекционере, собирающем лампочки. В его коллекции есть и лампочка фирмы «Эдисон», сделанная в 1881 году. Ей больше 100 лет, а она до сих пор работает. Снова вечная лампочка?

За эти 100 лет появились радио и телевидение, самолеты, космические ракеты, шариковые ручки, холодильники и много других технических систем, простых и сложных, больших и малых. Не хочется верить, что за это время человечество не только не смогло улучшить лампочку, но даже удалилось от идеала, потеряв секрет ее вечности. Это, скорее, наводит на вопрос: нужна ли вечная лампочка?

Чтобы ответить на него, разберемся в физической стороне дела. Почему лампочка горит? Почему перегорает? Итак,

Почему горит лампочка?

Нить лампочки накаливания излучает свет потому, что нагрета.

Все нагретые тела излучают электромагнитные волны. В тепловом излучении присутствуют волны всевозможных длин, и на каждую компоненту (точнее, на каждый интервал

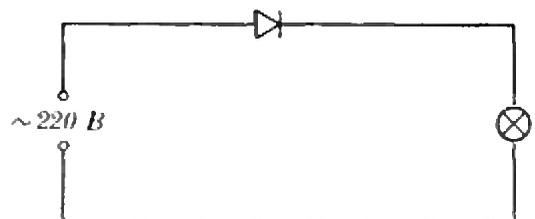


Рис. 1.

длин волн) приходится своя доля энергии. В 1900 году Макс Планк вывел закон излучения абсолютно черного тела. (Мы не будем выяснять, что такое «абсолютно черное тело»; для нас важно, что нить лампы накаливания с достаточной точностью можно считать именно таким телом, и потому мы можем пользоваться законом излучения Планка.) Согласно формуле Планка энергия, излучаемая в единицу времени с единицы поверхности нагретого до температуры T тела в интервале длин волн от λ до $\lambda + \Delta\lambda$, равна

$$u(\lambda, T) d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda.$$

В этой формуле c — скорость света, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана. Полная излучательная способность тела

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\lambda, T) d\lambda$$

(т. е. мощность излучения с единицы поверхности во всем диапазоне электромагнитных волн) зависит только от температуры и подчиняется закону Стефана — Больцмана:

$$u = \sigma T^4,$$

где $\sigma = \frac{2\pi^5 h^4}{15c^2 h^3} \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ — постоянная Стефана — Больцмана. Для ориентировки в порядке величин заметим, что при температуре плавления вольфрама 3500 К величина u составляет $9 \cdot 10^6 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

Большая часть излучения нити бесполезна для освещения, поскольку лежит в невидимой инфракрасной области. Глаз воспринимает как свет лишь электромагнитные волны с длинами от $\lambda \approx 400 \text{ нм}$ (фиолетовый свет) до $\lambda \approx 760 \text{ нм}$ (красный свет). Полная мощность, излучаемая с единицы поверхности нагретого тела в диапазоне длин волн, видимых глазом, равна

$$u_{\text{вн}}(T) = \int_{\lambda_{\text{ф}}}^{\lambda_{\text{кп}}} u(\lambda, T) d\lambda,$$

а световой поток, даваемый лампочкой, —

$$\Phi(T) \approx A S u_{\text{вн}}(T),$$

где S — площадь излучающей поверхности (поверхности нити), A — коэффициент перевода энергетических величин в фотометрические, связанный с чувствительностью глаза. (Мы оставляем сейчас в стороне все тонкости, обусловленные различной чувствительностью глаза к разным цветам, но заметим, что к красным и фиолетовым лучам глаз гораздо менее чувствителен, чем к желто-зеленым.)

Сила света лампочки, измеряемая в канделах (или, по-старому, в свечах), равна световому потоку, излучаемому в единицу телесного угла, т. е. приблизительно равна

$$I(T) \approx \frac{\Phi(T)}{4\pi}.$$

В диапазоне интересующих нас длин волн и при температурах, не превышающих температуру плавления вольфрама,

$$I(T) \approx \text{const} (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^{-x},$$

$$\text{где } x = \frac{hc}{\lambda_{\text{кп}} k} \frac{1}{T}.$$

Поскольку величина $\frac{hc}{\lambda_{\text{кп}} k}$ имеет размерность температуры, мы будем обозначать ее $T_{\text{кп}}$. Она составляет примерно 19 000 К. Конкретное значение константы перед скобкой для нас не существенно: нас будет интересовать только общий вид зависимости $I(T)$.

Теперь мы должны выяснить следующий вопрос:

Как зависят T и I от U ?

Зависимость температуры нити от напряжения автор определял экспериментально. Схема определения не сложная: при разных значениях напряжения U на лампе измерить токи J через нее и вычислить сопротивление нити $R_U = U/J$; затем воспользоваться формулой, выражающей зависимость сопротивления от температуры —

$$R(T) = R(T_1)(1 + \alpha(T - T_1))$$

$(R(T_1))$ — сопротивление лампочки при комнатной температуре T_1 , α — термический коэффициент сопротивления, равный для вольфрама $0,0045 \text{ K}^{-1}$, и вычислить значения T при разных напряжениях U на лампе:

$$T_U = T_1 + \frac{R_U(T) - R(T_1)}{\alpha R(T_1)}$$

Автор проделал несколько измерений с 60-ваттной лампочкой, рассчитанной на $U_0 = 220 \text{ В}$. Сопротивление $R(T_1)$ (его можно измерять омметром) оказалось равным 70 Ом . Чтобы получить разные значения напряжения на лампочке, последовательно с ней включались различные сопротивления (утюг, кипятильник, телевизор, другие лампочки). Напряжение на лампочке измерялось вольтметром, ток через нее — амперметром.

Результаты измерений приведены в таблице 1. (В таблице указана и мощность $P_U = UI$, потребляемая лампочкой при разных напряжениях; эта величина нам пригодится в дальнейшем.) Как видно из таблицы, рабочая температура нити T_0 при напряжении $U_0 = 220 \text{ В}$ составляет 2900 К .

Зная, как зависит температура нити от напряжения, мы можем вычислить силу света лампочки при разных напряжениях.

Силу света I (в некоторых относительных единицах) можно очень точно определить экспериментально с помощью фотометра с масляным пятном. Этот замечательный прибор представляет собой установленный вертикально лист бумаги, в середине которого имеется полупрозрачное пятно. С одной стороны лист освещается «эталонной» электрической лампочкой. С другой стороны листа помеща-

Таблица 1

$U, \text{ В}$	110	150	180	220
$I, \text{ А}$	0,16	0,20	0,22	0,25
$R, \text{ Ом}$	690	790	820	880
$T, \text{ К}$	2300	2500	2700	2900
$P, \text{ Вт}$	20	30	40	55

ется исследуемая лампочка (рис. 2), и с этой же стороны ведется наблюдение. Если освещенность листа со стороны наблюдателя меньше, чем с противоположной, пятно выглядит светлым на темном фоне листа, если наоборот — пятно выглядит более темным. При равенстве освещенностей пятно едва различимо.

Освещенность поверхности $E = I/r^2$, где I — сила света источника, r — расстояние до него. При изменении напряжения U на исследуемой лампочке меняется ее сила света I . Чтобы освещенность пятна, создаваемая лампочкой при разных значениях U , была равна освещенности I_0/r_0^2 от эталонной лампочки, надо менять расстояния r . Таким образом можно найти отношение силы света лампочки при напряжении U к силе света ее при рабочем напряжении U_0 (на эталонной лампе — такой же, как исследуемая, — напряжение все время U_0):

$$I(U)/I_0 = (r/r_0)^2.$$

Результаты таких измерений приведены в таблице 2. Для того чтобы правильно обработать результаты эксперимента, надо построить график зависимости I_U/I_0 от U в таких координатах, в которых он будет иметь наиболее простой вид. На рисунке 3

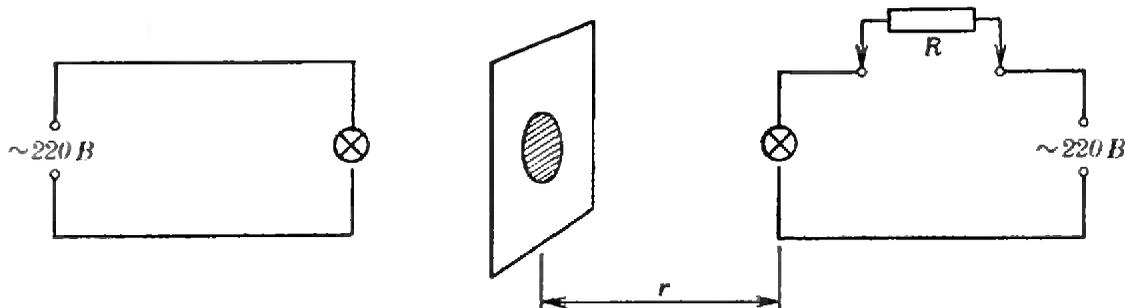


Рис. 2.

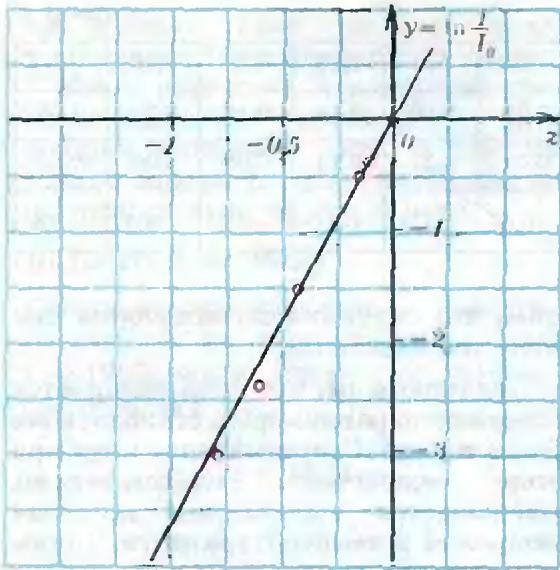


Рис. 3.

показана зависимость величины $y = \ln \frac{I}{I_0}$ от $z = 1 - \frac{U_0}{U}$ (необходимые данные приведены в той же таблице 2). Экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую линию. Логарифмический масштаб по оси y выбран потому, что если бы в формуле для $I(T)$ не было стоящего перед экспонентой многочлена, то зависимость $y(T)$ имела бы вид

$$y = \ln \frac{I}{I_0} = \frac{T_{кр}}{T_0} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right),$$

величина же $\theta = 1 - \frac{T_0}{T}$, как можно заключить из данных таблицы 1, с хорошей точностью пропорциональна z (чтобы догадаться до этого, нужны были некоторые наводящие соображения, связанные с балансом энергии в лампочке): $\theta \approx Kz$, где коэффи-

Таблица 2

$U, В$	220	120	130	150	180	190
U_0/U	1	1,81	1,66	1,47	1,14	1,12
z	0	-0,81	-0,66	-0,47	-0,14	-0,12
$r, см$	27	5,5	8	13	21	22
I/I_0	1	0,05	0,09	0,23	0,60	0,66
y	0	-3,0	-2,4	-1,5	-0,5	-0,4

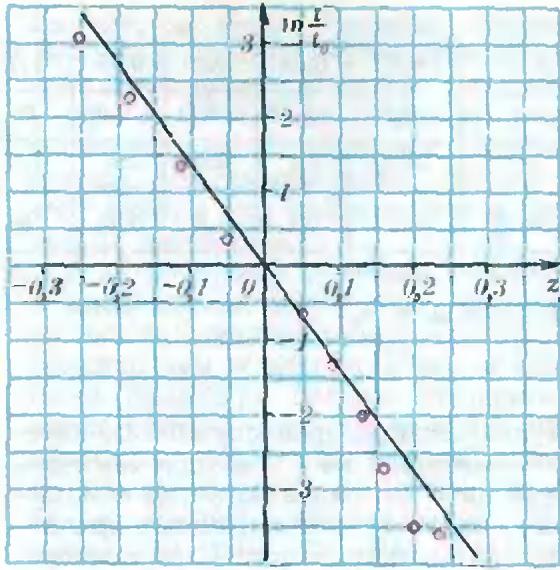


Рис. 4.

циент пропорциональности K равен примерно 0,3. Наличие многочлена перед экспонентой вызывает отклонение зависимости $y(z)$ от строгой пропорциональности, однако эти отклонения невелики.

Почему лампочка перегорает?

Причина перегорания лампочки ясна — это испарение вольфрама. Для того чтобы от поверхности нити оторвалась молекула вольфрама, необходимо, чтобы кинетическая энергия ее теплового движения $W \sim kT$ стала больше энергии связи молекулы с остальным кристаллом w . Согласно законам статистической физики, вероятность такого события пропорциональна $e^{-w/kT}$. Значит, число молекул, отрывающихся от нити в единицу времени, —

$$n \sim e^{-w/kT}.$$

Величину w можно определить из значения теплоты испарения вольфрама при комнатной температуре $Q = 850$ кДж/моль: $w = Q/N_A \approx 1,4 \times 10^{-18}$ Дж (N_A — число Авогадро); величина w/k , имеющая размерность температуры, — около 10^5 К.

Предположим, что нить перегорает после испарения определенного количества молекул. Это означает, что время службы лампочки тем больше, чем

U/U_0	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3
z	-0,25	-0,18	-0,11	-0,05	0	0,05	0,09	0,13	0,16	0,20	0,23
t/t_0	21,9	9,5	4,0	1,5	1,0	0,51	0,27	0,14	0,08	0,03	0,026
$\ln \frac{t}{t_0}$	3,1	2,3	1,4	0,43	0	-0,67	-1,3	-2,0	-2,7	-3,5	-3,6

меньше n , т. е.

$$t \sim \frac{1}{n} \sim e^{w/kT}$$

Пусть средний срок службы 60-ваттной лампочки на 220 В (при температуре нити T_0) равен t_0 . Тогда отношение срока службы лампочки при измененном напряжении U (и температуре нити T) к сроку службы при нормальном напряжении —

$$\frac{t}{t_0} = e^{w/kT - w/kT_0} = e^{-\theta w/kT_0},$$

где $\theta = \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$. Мы помним, что эта величина с хорошей точностью пропорциональна $z = 1 - \frac{U_0}{U}$. Следовательно, $\ln \frac{t}{t_0}$ пропорционален z .

Находить зависимость $\ln \frac{t}{t_0}$ от z в «домашнем» эксперименте — занятие долгое и дорогое, надо сжечь очень много лампочек. Поэтому пришлось найти готовые данные. Эти данные приведены в таблице 3, а на рисунке 4 представлен график зависимости $\ln \frac{t}{t_0}$ от z . Мы видим, что соответствующие точки неплохо ложатся на прямую линию. Наклон прямой равен -14 . Исходя из известных нам данных мы можем оценить и теоретическую величину этого наклона:

$$\ln \frac{t}{t_0} = -\frac{w}{kT_0} \theta \approx -\frac{wK}{kT_0} z,$$

так что наклон прямой — это $(-wK/kT_0)$, что составляет примерно -10 . Учитывая ту невысокую точность, с которой нам известны K и T_0 , совпадение следует признать неплохим.

Но если мы задумаемся над процессом испарения поглубже, то уви-

дим, что ситуация до некоторой степени парадоксальна.

Предположим, что нить испаряется совершенно равномерно, становясь все более тонкой. Сопротивление нити при этом возрастает, следовательно, уменьшается выделяемая тепловая мощность и температура нити. Таким образом, при однородном испарении с течением времени лампочка горела бы все тусклее, но никогда бы не перегорела (или, по крайней мере, служила бы очень долго).

Значит, причина перегорания нити в ее неоднородном испарении. Действительно, пусть в силу какой-то причины на нити образовалась маленькая перетяжка. Сопротивление участка нити в области перетяжки больше, чем сопротивление любого другого участка нити той же длины. При этом тепловая мощность $J^2 R_n$, выделяемая в области перетяжки, больше, чем в любом другом участке нити той же длины. Значит температура перетяжки выше, испарение с нее идет интенсивнее. Чем тоньше перетяжка, тем выше температура, тем интенсивнее испарение, тем быстрее утоньшается перетяжка, тем быстрее растет ее сопротивление. Этот все ускоряющийся процесс приводит в конце концов к перегоранию нити в том месте, где первоначально была даже небольшая перетяжка. На деле, конечно, вся нить несколько неоднородна по толщине, но развиться в значительную перетяжку успевает лишь самое сильное утоньшение: нить обычно перегорает только в одном месте.

Ситуации, подобные только что рассмотренной, встречаются в физике довольно часто. Эти ситуации называются неустойчивостями. Достаточно сказать, что именно неустойчивости плаз-

мы делают такой сложной задачу управляемого термоядерного синтеза.

Итак, причиной перегорания лампочки является неустойчивость однородного испарения нити. О том, как можно бороться с этим явлением, мы поговорим чуть позже, а пока

Подсчитаем копейки

Обычная осветительная лампочка рассчитана на средний срок службы $t_0 = 1000$ часов. Из наших графиков следует, что

$$\ln \frac{t}{t_0} \approx -14 \left(1 - \frac{U_0}{U}\right),$$

$$\ln \frac{I}{I_0} \approx 3,5 \left(1 - \frac{U_0}{U}\right),$$

т. е.

$$t = t_0 e^{-14 \left(1 - \frac{U_0}{U}\right)}, \quad I = I_0 e^{3,5 \left(1 - \frac{U_0}{U}\right)}.$$

Лампочка должна давать свет. Наилучшей лампочкой будет та, которая дает свет самый дешевый. Стоимость освещения за большое время складывается из стоимости потребляемой электроэнергии и стоимости лампочек, которые служат в среднем в течение времени t , а потом перегорают. Один киловатт-час электроэнергии стоит 4 копейки, новая лампочка — 25 копеек.

Пусть для наших целей нужна лампочка с силой света I_0 . Если сила света будет меньше, нам надоест портить глаза, и мы вернем более мощную лампочку. Предположим, что в сеть с напряжением $U = 220$ В включена «усовершенствованная» лампочка с $U_0 = 235$ В. Срок ее службы $t = t_0 e^{0,95} \approx 2600$ ч, но ее сила света $I = I_0 e^{-0,25} \approx 0,78 I_0$, т. е. меньше I_0 , и нам захочется поменять лампочку на более мощную. «Усовершенствованная» лампочка с нужной нам силой света I_0 будет потреблять в 1,2 раза большую мощность, чем обычная лампочка. За 1000 часов (срок службы обычной лампочки) «усовершенствованная» лампочка с той же силой света, что у обычной лампочки на 60 Вт, израсходует энергии не 60 кВт·ч, что в денежном измерении составляет 2 р. 40 к., а 72 кВт·ч, т. е. на 2 р. 88 к.

Значит, за время службы обычной лампочки «усовершенствованная» потребляет электроэнергии дополнительно на 48 к., что почти равно стоимости двух новых лампочек. Следовательно, повышение срока службы за счет работы при пониженном напряжении невыгодно.

Если речь идет о вечной лампочке с диодом, для которой $U_0/U \approx 1,43$, то срок ее службы примерно в 350 раз больше, чем у обычной, но ее сила света $I \approx 0,22 I_0$. Вечная лампочка с силой света I_0 потребляет в 2,5 раза большую мощность, чем обычная: вместо лампочки на 60 Вт последовательно с диодом надо включать лампочку на 150 Вт. За 1000 часов работы перерасход энергии составит 90 кВт·ч, или, в денежном измерении, 5 р. 60 к. — стоимость 22 лампочек. Игра не стоит свеч!

Подробный расчет показывает, что улучшить лампочку за счет увеличения U_0 нельзя. Это значит, что за 100 лет своего существования обычная лампочка накаливания практически достигла идеала, и чтобы усовершенствовать ее, нужны новые остроумные технические решения. Сейчас мы поговорим и о них, но вначале отметим, что на примере лампочки мы столкнулись с довольно типичным техническим противоречием «стоимость — надежность»: чем надежнее, тем неэффективнее. Если уменьшение надежности не сопряжено с риском, выбирают дешевое и ненадежное — пусть даже одноразовое. Примеры: бумажные салфетки и стаканчики, фломастеры и т. д.

Итак, лампочка не должна служить вечно. И все же было бы хорошо удлинить ее срок службы или при том же сроке службы поднять ее КПД за счет перекала нити. Единственный способ добиться этого — заставить «залечиваться» образовавшиеся на нити перетяжки. Есть несколько остроумных решений этой задачи. Одно из них — заполнение колбы лампы инертным газом с молекулярной массой, меньшей чем у вольфрама, — криптоном (конечно, при очень малом

(Окончание см. на с. 16)

molitur et non est alio modo purpure le...
De agardis. ispar...
iornoturi guboe l'ormas l'rod ammsi gaur



ser dif bolrisi por l'ec l'na l'iah rec ge...
omosi...
fracti...
ordinare mon...
secundum

О ВЕЛИКОМ ЧИСЛЕ ДЕНОГАРДУСА И ЗАКОНЕ ГУКА

В. Ю. ОВСИЕНКО

Недавно в небольшом немецком городе Штурмигарде состоялся международный математический конгресс. Главной темой, обсуждавшейся на конгрессе, была обгоревшая рукопись, озаглавленная «Принципы», средневекового схоласта, алхимика и астролога Деногардуса. Она была случайно обнаружена при разборе старинных документов, хранившихся в городской ратуше. Оказалось, что этот манускрипт содержит удивительные факты, имеющие большое значение для современной математики.

Подвергаясь преследованиям инквизиции, Деногардус был вынужден оформлять свои открытия в виде анаграмм*) и чертежей. Инквизиции не удалось настичь ученого при его жизни. Однако после его смерти единственный экземпляр рукописи по доносу племянника Деногардуса был конфискован и предан огню. Только большая толщина манускрипта спасла его от полного уничтожения. Известно, что астролог постоянно занимался вычислением так называемо-

го Великого Числа, которое, как он считал, управляет движением всех небесных тел (планет, комет и т. д.), входящих в Солнечную систему. Это Число все время меняется. Наблюдая за его изменением, Деногардус предсказывал (в зависимости от характера изменения) различные бедствия: наводнения, пожары, войны и эпидемии. Хотя эти предсказания часто сбывались, его утверждениям долгое время не придавалось должного значения. Например, на 666 странице «Принципов» предсказана большая астрономическая катастрофа, которую участники конгресса отождествили с падением Тунгусского метеорита. Ошибка в предсказании Деногардуса составляет всего 9 лет. Найденная рукопись содержала также ряд строгих математических теорем. Деногардус называл их схолиями*). Приведем их современные формулировки.

Схолия 1. Движение каждой планеты — плоское: ее орбита принадле-

*) Анаграмма — зашифрованное краткое изречение.

*) Это слово имеет греческое происхождение и родственно знакомому всем слову «школа».

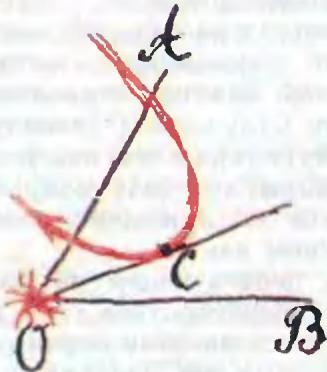


Рис. 1.

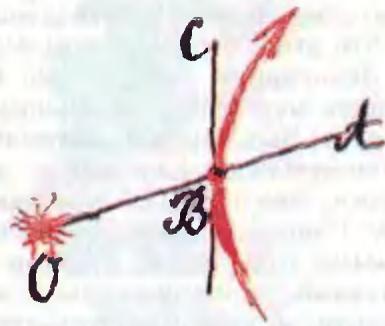


Рис. 2.



жит некоторой плоскости, содержащей Солнце.

Две другие схолии были представлены в рукописи в виде чертежей (рис. 1, 2). Их смысл состоит в следующем.

Схолия 2. Между двумя прохождениями каждого луча ОА комета обязана пересечь любой другой луч ОВ, причем ровно один раз.

Схолия 3. Если комета отталкивается от Солнца, то ее траектория не может пересечь никакую прямую, проходящую через Солнце, более одного раза.

Однако поистине значительный интерес вызвала у участников конгресса так называемая

Великая Теорема Деногардуса: Великое Число можно найти, наблюдая комету.

Штурмгардский конгресс обратился с запросом в европейскую историко-археологическую ассоциацию «Archeologe» и получил все имеющиеся в наличии скудные сведения о Деногардусе. О его жизни не сохранилось практически ни одного достоверного свидетельства. В хронике упоминается случай, когда один из горожан, наблюдая солнечное затмение с башни ратуши, был укушен крысой. Однако убедительных доказательств того, что этим горожанином был именно Деногардус, обнаружено не было. Больше известно о воззрениях Деногардуса. Выдающийся астролог (вполне естественно для своего времени) считал, что планеты вращаются вокруг Солнца, связанные с ним невидимыми пружинами. Кроме прямых указаний, обнаруженных в манускрипте, об этом свидетельствует чертеж, содержащийся в рукописи.

Перед участниками конгресса стояла сложная задача: перевести на язык современной математики утверждения Деногардуса и установить математический смысл его схолий. В результате напряженной совместной работы математиков, физиков и историков эта задача была успешно решена.

Согласно Деногардусу, каждое небесное тело связано с Солнцем пружиной. Поэтому сила его притяжения к Солнцу пропорциональна расстоянию до него (мы знаем это утверждение, описывающее силы, возникающие в пружинах, как закон Гука; однако Деногардусу оно было известно задолго до Гука). Сила притяжения может быть как положительной — пружина



стремится сжаться, так и отрицательной — пружина стремится распрямиться. Более того, согласно взглядам Деногардуса, жесткость невидимых пружин, на которых подвешены планеты, меняется с течением времени. Большинство исследователей сошлись на том, что эта жесткость и есть Великое Число, управляющее движением небесных тел.

Деногардус не пользовался математической символикой — ее введение в научный обиход оставалось делом далекого будущего. Однако участникам Штурмгардского конгресса удалось сформулировать открытия Деногардуса на привычном нам математическом языке.

Сила, действующая на планету в «модели Деногардуса» (так участники конгресса назвали картину движения небесных тел, описанную в ману-



скрипте), задается законом Гука:

$$\vec{F} = k(t)m\vec{r}. \quad (1)$$

В этой формуле m — масса планеты, \vec{r} — радиус-вектор с началом в Солнце и концом в данной планете, а зависящий от времени коэффициент $k(t)$ — жесткость невидимой пружины, или Великое Число Деногардуса.

Простая формулировка закона (1) сразу позволяет доказать первую схолию Деногардуса. Зафиксируем некоторый момент времени и проведем плоскость l через Солнце O , планету A и вектор скорости планеты \vec{v} . Согласно формуле (1), вектор силы, действующей на планету, пропорционален вектору OA и лежит в той же плоскости l . Следовательно, сила, стремящаяся вывести планету A из плоскости l , отсутствует. Поэтому дальнейшее движение планеты тоже будет происходить в этой плоскости.

Приведенное доказательство — результат кропотливой реконструкции рассуждений, встречающихся на страницах «Принципов». Сам автор широко использует так называемые «принцип достаточных оснований» и «постулат целесообразной справедливости». Их формулировки представляются современному читателю туманными, а научная ценность — сомнительной*).

Для обоснования второй и третьей схолий Деногардуса обратимся снова к уравнению (1). По второму зако-

ну Ньютона (также, вероятно, известному Деногардусу) ускорение планеты пропорционально действующей на нее силе: $\vec{a} = F/m$. Поэтому вектор ускорения задается формулой:

$$\vec{a} = k(t)\vec{r}. \quad (2)$$

Согласно первой схолии, оба вектора \vec{a} и \vec{r} , участвующие в формуле (2), лежат в некоторой плоскости. Вводя в этой плоскости координаты, мы можем написать: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{r} = (x_1, x_2)$. Уравнение (2) превращается в два одинаковых уравнения

$$a_i^{(t)} = k(t)x_i(t), \quad i = 1, 2,$$

в каждом из которых a и x — уже не векторы, а обычные функции от аргумента t , т. е. времени. Вспомним теперь, что ускорение $a(t)$ — это вторая производная от координаты $x(t)$ по времени. Поэтому закон Гука — Деногардуса превращается в следующее дифференциальное уравнение на каждую координату x планеты:

$$x''(t) = k(t)x(t). \quad (3)$$

Полагая, что он описывает законы движения небесных тел, Деногардус в действительности построил теорию дифференциального уравнения (3). Именно в этом состоит значение его открытия для математики.

Решения уравнения (3) — это функции от переменной t . Их можно умножать на числа и складывать — при этом снова будут получаться решения. Множество всех решений описывается следующим утверждением:

Решения уравнения $x''(t) = k(t)x(t)$ устроены как векторы на плоскости: любое из них может быть получено



* В другом месте Деногардус пишет: «Удивительная гармония мира, состоящего всего из двух элементов — небесных тел и пружин, — лучшее подтверждение того, что Вселенная создана Творцом, подобно тому, как искусный часовщик создает часы».



из двух фиксированных решений после умножения их на числа и сложения.

Это — сложная математическая теорема, ведь непонятно даже, почему существует хоть одно решение. Однако Деногардус хорошо понимал ее и почти доказал следующим изящным рассуждением. Каждая планета будет как-нибудь двигаться, значит, ее координаты сразу дают пару решений уравнения (3) (1). Если же предположить существование третьего решения, независимого с этими двумя, то мы немедленно столкнемся с противоречием. В самом деле, точка в пространстве, все три координаты которой изменяются как решения уравнения (3), обязана двигаться в одной плоскости (!!).

Что бы немного освоиться с уравнением (3), предлагаем вам разобрать его простейший частный случай, в котором коэффициент $k(t)$ не зависит от времени.

Упражнение 1. Решите уравнение $x'' = -x$. Подсказка: рассмотрите точку на плоскости, движущуюся равномерно по окружности.

Вторая и третья схолии Деногардуса приобретают смысл удивительных теорем, описывающих свойства решений дифференциального уравнения (3).

Между двумя значениями времени t_1 и t_2 , в которых одно решение уравнения $x'' = k(t)x$ обращается в нуль, любое другое решение просто обязано хоть один раз обратиться в нуль.

Другими словами, нули двух решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ чередуются.

Чтобы вывести эту теорему из второй схолии, рассмотрим на плоскости движение точки, зависимость координат которой от времени задана функциями $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Тогда движение этой точки будет удовлетворять уравнению (3), а следовательно, и (2), т. е. будет подчиняться второй схолии Деногардуса. Выберем в качестве луча OA положительную полуось абсцисс, а в качестве луча OB — полуось ординат. Когда точка пересекает одну ось, ее проекция на другую ось (т. е. второе решение) равно нулю. Поскольку моменты пересечения осей должны чередоваться, чередуются и нули решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$.



А как же доказывается вторая схолия? Ее простое геометрическое доказательство читается прямо по чертежу из трактата Деногардуса (см. рис. 1). Если комета дважды пересекает луч OA , не пересекая при этом луч OB , то в некоторый промежуточный момент времени ее траектория касается некоторого луча OC . В этот момент и скорость кометы, и действующая на нее сила направлены вдоль прямой OC . Следовательно, сила, стремящаяся сдвинуть комету с этой прямой, отсутствует — комета останется на прямой OC . Но тогда она больше не пересечет луч OA , что противоречит исходному предположению. Это изящное рассуждение показывает, как свободно владел Деногардус геометрией.

Аналогично доказывается и третья схолия (см. рис. 2). Если сила, действующая на комету, направлена от Солнца (Деногардус пишет о сжатой

пружине, стремящейся распрямиться...), то комета будет вынуждена оставаться по одну сторону от любой касательной к ее траектории и не сможет больше пересечь луч OA . Выбирая в качестве луча OA полуось ординат, мы получим такую теорему:

Если коэффициент $k(t) \geq 0$ при всех t , то никакое решение уравнения $x'' = k(t)x$ не может обратиться в нуль более одного раза.

Выполнив следующее упражнение, вы проверите эту теорему в частном случае.

Упражнение 2. Решите уравнение $x'' = x$. Подсказка: рассмотрите функции $x = e^t$ и $x = e^{-t}$.

Обладая примитивными средствами наблюдения, Деногардус мог измерять лишь углы между небесными телами, но не их расстояние до Солнца. Тем не менее астрологу удавалось находить Великое Число $k(t)$ по одному лишь направлению луча, соединяющему Солнце и комету. Ответ на вопрос, как можно это сделать, содержится в современном доказательстве Великой Теоремы Деногардуса.

Это доказательство основано на простом наблюдении.

Упражнение 3. Докажите, что для любых двух решений уравнения $x''(t) = k(t)x(t)$ величина $W(x_1, x_2) = x_1 x_2' - x_2 x_1'$ не зависит от времени t . Подсказка: найдите производную W по времени и воспользуйтесь уравнением (3).

Тем, кто выполнил это упражнение, может показаться, что успех — результат простого везения. Однако утверждение о постоянстве $W(x_1, x_2)$ имеет физический смысл. Рассмотрим движение тела на плоскости с уско-



рением $\vec{a}(t) = k(t)\vec{r}(t)$. Момент его импульса постоянен, так как сила, действующая на тело, всегда направлена к центру. Момент импульса равен площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{r} и $m\vec{v}$. Покажите, что эта площадь равна $m(x_1 v_2 - x_2 v_1)$. Поскольку $x_2' = v_2$ и $x_1' = v_1$, постоянство момента импульса равносильно постоянству величины $W(x_1, x_2)$.

Итак, Великая Теорема утверждает, что по направлению радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ можно определить коэффициент $k(t)$. Будем задавать направление $\vec{r}(t)$ величиной $\operatorname{tg} \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — угол между вектором $\vec{r}(t)$ и осью абсцисс. Обозначим функцию $\operatorname{tg} \varphi(t)$ через $f(t)$.

Упражнение 4. Докажите, что $k(t) = -\frac{1}{2} \left(f'''/f' - \frac{3}{2} (f''/f')^2 \right)$ (Великая Формула Деногардуса).

Подсказка: по определению тангенса $x_2(t) = f(t)x_1(t)$. Подставим значение $x_2(t)$ в формулу для $W(x_1, x_2)$. После упрощений получим такую формулу: $W = x_1^2 f'$. Значит, первая координата тела $x_1(t) = \sqrt{W/f}$ определяется с точностью до постоянного множителя W . Из уравнения $x_1' = k(t)x_1$ находим $k(t) = x_1''/x_1$. Дальнейшее — полезное упражнение на взятие производной от сложной функции (см. «Квант» № 4 за 1988 год, с. 36).

Остается загадкой, как мог Деногардус, не владея дифференциальным исчислением, определять свое Великое Число. Возможно, тут сыграли роль интуиция и опыт ученого, а может быть, выдающийся астролог знал много больше, чем он счел возможным изложить в своем трактате. Вопрос остается открытым...

В заключение предлагаем вам еще одну задачу, связанную с моделью Деногардуса.

Упражнение 5. Докажите, что если угловая скорость движения кометы относитель-





но Солнца постоянна, то коэффициент $k(t)$ не зависит от времени.

«Принципы» Деногардуса вызвали большой резонанс в математических кругах. Большинство участников Штурмгардского конгресса сошлись во мнении, что именно Деногардуса надо считать первооткрывателем дифференциального исчисления и основоположником теории дифференциальных уравнений.

Комментарий

Уважаемые читатели, вероятно, вы давно догадались, что почти все сказанное — шутка. Великий алхимик и астролог Деногардус — вымышленное лицо. Основателем же теории дифференциальных уравнений является Исаак Ньютон*), который, кстати, также зашифровал свое открытие в виде знаменитой анаграммы: «Полезно решать дифференциальные уравнения». Правда, сделал он это по другой причине, нежели Деногардус, — Ньютон опасался конкуренции.

Что же касается планет «на пружинах», притягивающихся к Солнцу по закону Гука, то здесь Деногардус противоречит Ньютону. Согласно закону всемирного тяготения, сила при-

тяжения между планетой и Солнцем обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Справедливости ради отметим, что движение каждой планеты в отдельности можно описывать законом Гука $\vec{F} = -mk(t)\vec{r}(t)$, но коэффициент $k(t)$ — свой для каждой планеты. Вообще, законы Ньютона и Гука, в некотором смысле, двойственны друг другу. Например, траектории тел, подчиняющихся закону Гука с постоянным коэффициентом k , будут кривыми второго порядка (эллипсами, гиперболами или параболами), как и траектории обычных небесных тел, подчиняющихся закону Ньютона. Более того, если падающее тело будет продолжать двигаться внутри Земли, подчиняясь только силе тяжести, его движение будет описываться уже законом Гука.

Отношения между Ньютоном и Гуком были так же непросты, как и между соответствующими законами. Первым о существовании закона «обратных квадратов» догадался Гук, о чем сообщил в письме Ньютону, который сумел с помощью этого закона объяснить наблюдения Кеплера. Некоторое время между Гуком и Ньютоном продолжались приоритетные споры. Вы можете прочитать об этом и о многих других интересных вещах в книге В. И. Арнольда «Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов» (издательство «Наука», 1989 г.).

Уравнение $x''(t) = k(t)x(t)$ обычно называется в математике уравнением Штурма — Лиувилля, вторая и третья скобки Деногардуса — теоремами Штурма*). Эти теоремы были доказаны 150 лет назад. Они породили область математики, ставшую классической, — теорию Штурма. Число $W(x_1, x_2) = x_1x_2' - x_2x_1'$ (момент импульса) называется *определителем Вронского (вронскианом)*.

*) «Ньютон» (с некоторой натяжкой) можно воспринимать как «new town» — «новый город». «Деногардус» означает почти то же самое: «De novo garcius» — «Из нового города», но не на английском, а на жаргоне, распространившемся в Римской империи в VI веке нашей эры в результате смешения с немецким языком. Другие варианты этой же фамилии: «Нейштадт» (нем.) и «Новгородцев» (рус.). Кстати, главный труд Ньютона называется «Principia».

*) Намек на это содержится в названии города, в котором происходил конгресс, посвященный Деногардусу.

ardius.



Если коэффициент k не зависит от времени и $k < 0$, то уравнение $x'' = k(t)x$ превращается в известное вам по школьной программе уравнение малых колебаний (решенное вами в упражнении 1). Оно описывает все на свете колебания с малыми амплитудами; x — это (малое) отклонение от положения равновесия.

Упражнение 6. Вычислите коэффициент k в случаях, изображенных на рисунке 3, если а) k — коэффициент жесткости пружины,

m — масса груза; б) l — длина невесомой нерастяжимой нити; в) R — радиус ямы, d — диаметр шарика.

Наконец, Великое Число Деногардуса, а вернее — Великая Формула Деногардуса (упражнение 4) носит название производной Шварца, или шварциана. В действительности, эта формула была сообщена в письме Г. А. Шварцу великим немецким математиком К. Ф. Гауссом. Швар-

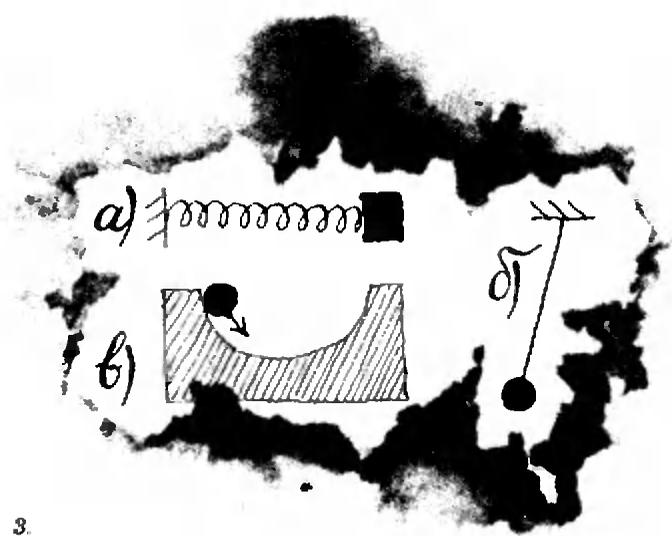


Рис. 3.

циан — популярный объект современной математики. Он обладает замечательным свойством появляться в самых разных математических теориях.

Итак, хотя все сказанное о Деногардусе — не более чем розыгрыш, математическое содержание его работ вполне серьезно. Как говорится: «В каждой шутке есть доля шутки...»

Вечная электрическая лампочка?

(Начало см. на с. 2)

давлению, чтобы не слишком возросла теплоотдача). При работе лампы в газе внутри баллона устанавливается некоторое распределение температуры: около нити температура гораздо выше, чем около стенок баллона. Полное давление криптона и паров вольфрама в колбе работающей лампы всюду одинаково, однако вблизи нити больше паров вольфрама, а у холодной стенки больше криптона. Такое неоднородное распределение газов связано с явлением, называемым термодиффузией. При этом у оторвавшейся от нити молекулы вольфрама больше шансов вернуться в наиболее горячее место нити и меньше шансов осесть на стенке.

В галогенных лампах автомобильных фар (здесь остро стоит вопрос о яркости источника) газ, заполняющий колбу, образует с вольфрамом летучее соединение, разлагающееся и выделяющее металлический вольфрам при контакте с раскаленной нитью. Такие усовершенствования оправданы, так как не слишком дороги и почти не сопряжены с увеличением потребляемой мощности.

Размышляя о лампочке, мы говорили о различных важных вещах — об излучении нагретого тела, о температурной зависимости сопротивления, об испарении и неустойчивостях, о технических противоречиях и термическом разделении газов. И каждую из этих тем можно было бы далеко продолжить. А ведь другие окружающие нас предметы ничуть не менее интересны, чем лампочка...

ТРУДНАЯ ЗАДАЧА

Кандидат физико-математических наук В. А. БРОНШТЭН

Эта задача имеет длительную историю, охватывающую три с половиной столетия. Сформулировать ее можно так:

Куда упадет снаряд, выпущенный из орудия вертикально вверх? Начальная скорость снаряда и географическая широта места известны. Вы уже догадались, что на движение снаряда должно влиять вращение Земли. Те, кто получше знает физику, вспомнят еще и о кориолисовых силах. Но вернемся к истории задачи.

За полвека до выхода «Начал» Исаака Ньютона французский ученый М. Мерсенн (1588—1648) задумал решить эту задачу экспериментальным путем. Надо сказать, что для Мерсенна подобный опыт был не «спортивной» забавой, а попыткой провести «мировоззренческий» эксперимент. Мерсенн был ревностным поклонником Галилея, распространителем его идей во Франции. Результаты эксперимента со стрельбой из

пушки должны были, по мнению Мерсенна, подтвердить вращение Земли.

Для осуществления задуманного опыта Мерсенн привлек военного инженера М. Пти. Они установили пушку вертикально и сделали несколько выстрелов. На приведенной здесь гравюре, взятой из книги П. Вариньона «Соображения о причине тяжести» (1690), изображены Мерсенн (в одежде монаха) и Пти, ожидающие, как говорит надпись сверху, «упадет ли обратно?».

Опыты Мерсенна и Пти закончились неудачно: они даже не смогли разыскать выпущенные ими снаряды, хотя по расчетам последние должны были упасть в нескольких десятках метров от пушки.

В конце XIX века эта задача привлекла внимание известного французского астронома и популяризатора К. Фламариона (1842—1925). Познакомившись с книгой П. Вариньона и воспроизведя в своей «Астрономии» уже известную нам



Гравюра из книги П. Вариньона (1690), изображающая опыт М. Мерсенна и М. Пти.

гравюру, он дал такое решение задачи: «Если выстрелить из пушки, обратив ее прямо вверх, к зениту, то ядро снова упадет в жерло пушки, хотя за время его подъема и нисхожденья пушка передвинется с Землей к востоку. Причина очевидна. Ядро, поднимаясь вверх, ничего не теряет из скорости, сообщенной ему движением Земли. Полученные им два толчка не противоположны: оно может пройти километр вверх и в то же время сделать, например, 6 км к востоку. Движение его в пространстве будет совершаться по диагонали параллелограмма, одна сторона которого 1 км, другая — 6 км. Вниз под влиянием тяжести оно будет двигаться по другой диагонали (вернее, по кривой, вследствие того, что движение ускоренное) и как раз упадет снова в жерло пушки, которая по-прежнему остается в вертикальном положении».

Дальше Фламарион пишет о трудностях постановки такого эксперимента, вспоминает о неудачных попытках Мерсенна и Пти...

Три десятилетия спустя советские читатели узнали об этой задаче из книги нашего замечательного популяризатора науки Я. И. Перельмана «Занимательная астрономия». Первое издание книги вышло в 1929 году. Вот что там говорится: «Куда упал бы снаряд, пущенный отвесно вверх из пушки, установленной на экваторе? Такая задача обсуждалась недавно в одном немецком журнале применительно к воображаемому снаряду, пущенному вертикально вверх со скоростью 8000 м/с в первую секунду; снаряд этот должен через 70 минут достичь высоты 6400 км (земного радиуса)*). Вот что писал журнал: «Если снаряд выпущен отвесно вверх на экваторе, то он при вылете из орудия обладает еще и круговой скоростью точек экватора по направлению на восток (465 м/с). С этой скоростью снаряд будет переноситься параллельно экватору. Точка на высоте 6400 км, находившаяся в момент

выстрела отвесно над точкой отправления снаряда, перемещается по кругу двойного радиуса с двойной скоростью. Она, следовательно, опережает снаряд в восточном направлении. Когда снаряд достигнет высшей точки своего пути, он будет находиться не отвесно над пунктом отправления, а отстанет от него к западу. То же произойдет и при обратном падении снаряда. В результате снаряд за 70 минут полета вверх и обратно отстанет примерно на 4000 км к западу. Здесь и следует ожидать его падения».

Далее, сравнивая это решение с рассуждениями Фламариона в его «Астрономии», Я. И. Перельман пишет: «Два решения задачи, как видим, находятся в резком разногласии. Немецкий автор утверждает, что ядро упадет далеко к западу от места выстрела, французский — что оно должно упасть непременно в жерло орудия. Кто же прав? Строго говоря, неверны оба решения, хотя фламарионово гораздо ближе к истине. Ядро должно упасть к западу от пушки, однако не столь значительно, как утверждает немецкий автор, и не в самое жерло, как был убежден Фламарион».

В этом своем заключении Я. И. Перельман был совершенно прав, но с попытками дать свое собственное, верное решение ему просто не повезло.

В первом издании своей книги Перельман решает задачу так. Вследствие вращения Земли снаряд при выстреле имеет относительно центра Земли составляющую скорости, направленную по касательной к земной поверхности и равную 465 м/с (вспомним, что по условиям задачи дело происходит на экваторе). За 70 минут полета снаряд по этой причине сместится на восток вдоль касательной на $(70 \times 60 \times 465) \text{ м} = 1\,950\,000 \text{ м} = 1950 \text{ км}$. Из центра Земли этот отрезок будет виден под углом, тангенс которого равен отношению длины 1950 км к радиусу Земли. Легко подсчитать, что этот угол равен $16^\circ 57'$. Пушка за то же время сместится на восток на угол в $\left(\frac{360 \cdot 70}{27 \cdot 60}\right)^\circ = 17^\circ 30'$,

* Здесь Я. И. Перельман, по-видимому, оговорился: 70 минут уйдут и на взлет, и на спуск ядра.

т. е. опередит снаряд (в угловом измерении) на 33'. Этому соответствует расстояние на поверхности Земли в $\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6400 \cdot 33}{360 \cdot 60}$ км ≈ 60 км (из-за не-

точности в расчете Я. И. Перельман получил угол 46' и расстояние 80 км).

Это решение, увы, тоже было неверным. На ошибку Я. И. Перельмана обратили внимание специалисты, и уже во втором издании (1935 г.) он приводит новое (четвертое по счету) решение задачи:

«Задача, к сожалению, не может быть решена средствами элементарной математики. Для этой цели необходим специальный обстоятельный расчет, который по моей просьбе был выполнен известным ленинградским физиком профессором М. П. Бронштейном.*) В подробности этого расчета я здесь входить не могу. Поэтому ограничусь тем, что приведу здесь окончательный результат.

Если обозначим начальную скорость ядра через v , угловую скорость вращения земного шара через ω , а ускорение тяжести через g , то для расстояния x точки падения ядра к западу от пушки получаются выражения:

на экваторе

$$x = \frac{4}{3} \omega \frac{v^3}{g^2}, \quad (1)$$

а на широте φ

$$x = \frac{4}{3} \omega \frac{v^3}{g^2} \cos \varphi. \quad (2)^*$$

Подставляя $\varphi = (2\pi/86\,164) \text{ с}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, для условий задачи немецкого журнала Перельман получает 50 км, а для опыта Мерсенна и Пти ($v = 300 \text{ м/с}$, $\varphi = 48^\circ$) 1,7 м.

И тут Я. И. Перельману не повезло; оба эти значения были занижены им в 10 с лишним раз. Возможно, в первом случае Я. И., помня полученное ранее расстояние в 80 км, ожидал

получить близкое число и... допустил вычислительную ошибку, о которой так и не узнал.

Уже после смерти Я. И. Перельмана кто-то из «дотошных» читателей вздумал проверить его расчеты и написал редактору книги П. Г. Куликовскому. Начиная с восьмого издания книги (1956), оба числа были исправлены: первое на 520 км, второе — на 18 м. Текст остался без изменений.

Формулы типа (1) и (2) есть в классических трудах Гаусса, в работах академика А. Н. Крылова и в ряде курсов по теоретической механике. Они выводятся путем решения дифференциальных уравнений движения материальной точки в поле притяжения Земли.

И что же, на этом можно поставить точку? Оба решения найдены? Для примера с опытами Мерсенна и Пти — да: отклонение снаряда у них действительно должно было составить примерно 18 метров к западу. А вот в отношении первого примера (с орудием, выстреливающим снаряд со скоростью 8000 м/с) этого сказать нельзя. И вот почему.

Формулы (1) и (2) выведены при условии, что отношение высоты подъема снаряда к радиусу Земли h/R — малая величина. В опытах Мерсенна и Пти так оно и было. В самом деле, у них

$$h = \frac{v^2}{2g} \approx \frac{9 \cdot 10^4}{20} \text{ м} = 4,5 \text{ км},$$

что в 1400 раз меньше земного радиуса. Но в задаче из немецкого журнала $h = R$, т. е. $h/R = 1$, и формула (1) здесь непригодна. Приходится искать решение задачи заново.

Траектория полета любого тела в поле тяготения Земли (если пренебречь сопротивлением атмосферы) представляет собой одно из конических сечений — эллипс, параболу или гиперболу. Форма орбиты зависит только от начальной скорости тела. Если, как в нашем примере, начальная скорость равна первой космической (8000 м/с), то орбита — эллипс, большая полуось которого равна радиусу Земли. Малая полуось определяется направле-

*) Бронштейн Матвей Петрович (1906—1938), выдающийся физик и астрофизик, принадлежал к кругу Л. Д. Ландау. Был незаконно репрессирован в 1938 году. В последующих изданиях книги Я. И. Перельмана упоминание о М. П. Бронштейне было изъято.

нием начальной скорости.*) Посмотрим, чему равна малая полуось в нашем случае вертикального запуска.

Поскольку скорость вращения Земли на экваторе много меньше вертикальной скорости, сообщаемой снаряду при запуске, угол между касательной к траектории (в момент начала полета) и вертикальной линией можно найти из формулы

$$\sin \vartheta = \frac{465}{8000} = 0,058,$$

откуда $\vartheta = 3^\circ 20'$. Нетрудно сообразить, что и точка запуска, и точка падения снаряда лежат вблизи концов малой оси описываемого им эллипса (см. рисунок на с. 30). Тогда из геометрических свойств эллипса можно найти его эксцентриситет

$$e = \cos \vartheta = 0,9983$$

и малую полуось

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = 6378 \cdot 0,058 = 370 \text{ км.}$$

Таким образом, наш снаряд за время полета сместится к востоку на $2b = 740$ км. Но пушка за то же время сместится к востоку на 1950 км. Значит, относительно места запуска снаряд отклонится к западу на 1210 км.

Мы получили новое, уже шестое по счету решение задачи. Оно-то и является окончательным.

В заключение проанализируем причины ошибок предыдущих решений. Начнем с неудачного экспериментального решения Мерсенна и Пти. Самым простым объяснением их неудачи было бы предположить, что ствол пушки был не строго вертикальным. Возможно, так оно и было. Но Мерсенн был довольно опытным экспериментатором, и вряд ли отклонение ствола было большим. А расчетные оценки дают при отклонении в 1° разброс дальности падения снаряда не больше 300 м. Артиллеристы знают, что при стрельбе по дальним целям эллипс рассеяния (т. е. область, куда в основном попадают снаряды) опре-

деляется не только точностью установки орудия. Вращение снаряда, некоторая асимметрия его формы и распределения массы и, конечно, аэродинамические силы, действующие на летящий снаряд, могут заметно сказаться на траектории полета. Так что неудача Мерсенна и Пти была вполне закономерной.

Решение Фламариона было бы верным, если бы Земля была плоской, поле тяготения — однородным и пушка перемещалась бы по Земле поступательно. Тогда ядро действительно угодило бы прямо в жерло орудия. В этом решении не учтена ни шарообразность Земли, ни изменение ускорения ее поля тяготения с расстоянием.

В решении немецкого журнала правильно рассчитано только время полета снаряда. Время его полного оборота вокруг центра Земли (при начальной скорости, равной первой космической) $T = 84$ мин 20 с, а время от пуска до падения, согласно второму закону Кеплера, равно

$$T_1 = T \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) = 69 \text{ мин}$$

(площадь сектора эллипса, описываемая радиусом-вектором снаряда за время T_1 , складывается из площади треугольника OAB , равной $2ab/2$, и площади полуэллипса ACB , равной $lab/2$ (см. рисунок на с. 30); из отношения этой площади к площади эллипса lab мы и получим написанную выше формулу). В остальных расчетах немецкого журнала содержится грубая вычислительная ошибка. За 70 минут пушка переместится к востоку на 1950 км, и чтобы снаряд упал на 4000 км к западу от нее, он с самого начала должен двигаться к западу, чего не может быть.

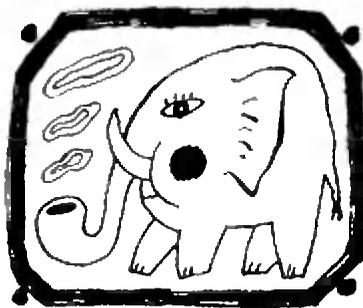
Первый расчет Я. И. Перельмана был чисто кинематическим, в нем не учитывалось изменение ускорения свободного падения с расстоянием от центра Земли.

*) В частном случае горизонтального запуска это будет окружность с радиусом, равным радиусу Земли.

„Квант“ улыбается

Новая сказка о Любопытном Слоненке

Нет, это сказка не о том скверном Слоненке, о котором писал Киплинг, Слоненке, который жил в Африке и которого колошматили его дорогие родственники, пока он не научился колошматить их сам. Это сказка о другом, о хорошем Слоненке, которого никогда не колошматили родственники и который никогда не жил в

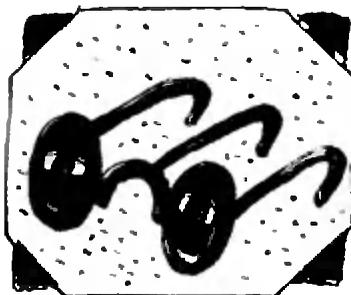


Африке, что очень странно, потому что он жил почти во всех странах мира. У этого Любопытного Слоненка с самого рождения был замечательный нос, так что он не нуждался в услугах Старого Крокодила, и со временем он открыл новую эру — Атомную Эру. И у него тоже было много-много дядек и много-много теток, и он был полон несносного любопытства и ко всем приставал со своими вопросами.

Потом Любопытный Слоненок подрос и стал задавать новые и неслыханные вопросы, которые пугали его родственников. Он спросил своего престарелого дядюшку философа, почему у него такая логика, и престарелый

дядюшка философ ответил, что это потому, что он знает, что он ничего не знает. А потом — все из-за того же несносного любопытства — он пересек Северное море и стал ходить по Англии и расспрашивать всех про Атом. И он спросил волосатого дядьку (Джи-Джи*), почему он делает такие глупые ошибки, а волосатый дядька Джи-Джи ответил, что это все из-за романтического воображения. И несносный Любопытный Слоненок направился к дымному городу Манчестеру, где росло много физиков, чтобы найти Старого Крокодила**) и спросить его про Атом. И он только чуточку-чуточку побаивался Старого Крокодила, потому что он был Храбрый Слоненок. И Старый Крокодил оскалил свои страшные зубы и рассказал ему все, что он знал про Атом.

И Любопытный Слоненок пошел домой, неся с

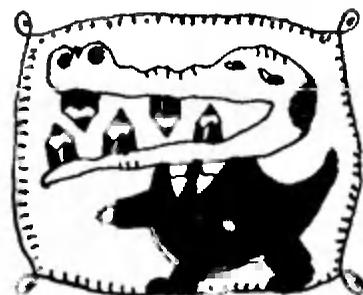


собой много разных постулатов и принципов, и разбрасывал их по дороге. А за ним шла толпа маленьких зверушек, которые подбирали эти постулаты и принципы и мастерили из них формулы и

*) Дж. Дж. Томсон.

**) Крокодил — прозвище Резерфорда, данное ему его ближайшими друзьями и учениками.

философские теории. И они воспевали и славили Слоненка, что, конечно, было очень скверно с их стороны, и уши дядюшек шевелились от ярости.



Но Любопытный Слоненок заставил почти всех дядюшек поверить почти во все его постулаты и принципы и сам стал дядькой, большим, мудрым и мирным, совсем как дикий слон Хати. И он стал курить трубку и разбрасывать вокруг золу, а некоторые из малых зверушек стали подражать ему и тоже стали большими и мудрыми. И Слоненок построил большой дом, где он мог жить и приглашать в гости больших зверей и маленьких зверушек. И он охотно играл с маленькими зверушками, если у него было хоть немного времени.

Но заря Атомной Эры наступала слишком быстро, и у Слоненка было очень много дел: ведь он должен был всем большим зверям объяснить, что им надо делать. И так как некоторые из них начали поступать плохо, Слоненок стал очень грустным. Но Король подарил ему маленького слона, вырезанного из слоновой кости, чтобы все звери и все его дорогие родственники все время помнили, какой он добрый и мудрый Слоненок.

Лягушка, маленькая зверушка (Из книги «Физики продолжают шутить». — М.: Мир, 1968.)



УДИВИТЕЛЬНЫЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

От редакции. Удивительное дело. Наш журнал существует уже 20 лет и никто никогда ничего не писал нам на эту тему: о свойствах периодов десятичных дробей. И вдруг — сразу три статьи! Одну написал В. Г. Столяр, другую — Э. А. Кураев и З. К. Силогадзе и третью — Г. А. Гальперин и А. В. Корлюков. В конце концов мы решили слить эти статьи в одну, приняв за основу статью В. Г. Столяра. Вот что из этого вышло.

Рассмотрим примеры...

Вероятно, читатель знает (а если нет — еще лучше: он узнает это из нашей статьи), что всякая обыкновенная дробь представляется периодической десятичной дробью (конечную десятичную дробь мы можем считать периодической с периодом 0 или 9). Но вряд ли многие представляют, сколько неожиданностей заключает в себе эта периодическая дробь. Рассмотрим три примера:

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$$

$$\frac{1}{12} = 0,083333333333\dots$$

$$\frac{1}{13} = 0,076923076923\dots$$

Мы видим, что у чисел $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{13}$ период начинается сразу после запятой и состоит из шести цифр (142857 и 076923 соответственно), а у числа $\frac{1}{12}$ он начинается с третьей позиции после запятой и состоит из единственной цифры: 3. Внимательное рассмотрение периодов чисел $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{13}$ позволяет заметить еще одно обстоятельство. Именно, положим $N=142857$ (период дроби $\frac{1}{7}$) и будем последовательно умножать N на 2, 3, 4, ...:

$$\begin{aligned} 2N &= 285714, & 3N &= 428571, \\ 4N &= 571428, & 5N &= 714285, \\ 6N &= 857142, & 7N &= 999999. \end{aligned}$$

Мы видим, что первые пять из этих чисел получаются из числа N «круговой перестановкой» цифр: сколько-то цифр из конца числа переезжает в начало; а число $7N$ состоит из одних девяток. Теперь проделаем то же с периодом дроби $\frac{1}{13}$ ($N=076923$):

$$\begin{aligned} 2N &= 153846, & 3N &= 230769, \\ 4N &= 307692, & 5N &= 384615, \\ 6N &= 461538, & 7N &= 538461, \\ 8N &= 615384, & 9N &= 692307, \\ 10N &= 769230, & 11N &= 846153, \\ 12N &= 923076, & 13N &= 999999. \end{aligned}$$

Здесь дело обстоит несколько иначе, но все равно интересно: пять из выписанных чисел ($3N$, $4N$, $9N$, $10N$, $12N$) получаются из числа N круговой перестановкой цифр, другие шесть чисел ($2N$, $5N$, $6N$, $7N$, $8N$, $11N$) получаются круговой перестановкой цифр друг из друга и, наконец, число $13N$ состоит из одних девяток.

Можно заметить еще вот что. Если взять любое из выписанных выше шестизначных чисел, кроме числа 999999, «разломить» его на два трехзначных числа и вычислить сумму этих половинок, то получится 999; например, $142+857=999$ и т. д.

Как видите, с периодическими десятичными дробями связано немало загадок. Некоторые из этих загадок остаются не разгаданными по сей день, несмотря на многочисленные попытки, предпринимавшиеся на протяжении нескольких веков математиками из разных стран, как великими, так и более «скромными». Все же кое-что об этом мы можем рассказать.

Хобби Иоганна Бернулли

Оставим на время периоды и перенесемся в Швейцарию конца XVIII ве-

ка. Мы наблюдаем странную картину: маститый математик Иоганн III Бернулли, представитель знаменитой математической семьи Бернулли, удостоившейся, подобно королевским династиям, присоединения порядковых номеров к именам, занимается, можно сказать, детской игрой! Он разлагает на простые множители числа, записываемые одними единицами: $11=11$, $111=3 \cdot 37$, $1111=11 \cdot 101$ и т. д. В 1773 году Бернулли помещает в трудах Берлинской академии таблицу простых делителей чисел, составленных из n единиц, — до $n=31$ (см. рис. 1). Несмотря на то, что ему не удалось найти делители для некоторых чисел этого вида ($n=11, 17, 29$), а для трех чисел ($n=20, 25, 27$) разложение не доведено до простых множителей, несмотря на допущенные им ошибки (для $n=22, 24, 26$), мы сегодня можем только преклоняться перед гигантским трудом по вычислению простых множителей этих огромных чисел. Можно предположить, что автором таблицы двигала не только исследовательская жилка ученого, но и подлинная эстетическая страсть художника, вдохновленного удивительным притягательным миром этой загадочной вереницы единиц. Свои сомнения в правильности разложения в отдельных случаях И. Бернулли отражает звездочкой.

В течение первых ста лет, прошедших со времени опубликования табли-

цы И. Бернулли, в нее не было внесено особой ясности. В 1838 году Вестерберг разложил на простые множители число из 11 единиц — и это все. В 1879 году французский математик Эдуард Люка находит простые делители для $n=17$ и признает, что цепочка из 19 единиц не поддается разложению. В 1895 году в Париже выходит его книга «Занимательная арифметика», содержащая приведенную ниже таблицу.

Угасший было интерес к числам, составленным из единиц, вновь возрос в последние годы, особенно в связи с развитием теории арифметических кодов, служащей основой для реализации методов помехоустойчивого кодирования в компьютерной технике (см., например, книгу Ю. Г. Дадаева «Теория арифметических кодов», изданную в Москве в 1981 г.). Наши загадочные числа, спустя почти двести лет после опубликования первой таблицы их делителей, приобретают, наконец, собственное имя. В «Занимательной теории чисел» (Нью-Йорк, 1964 г.) ее автор А. Бейлер, посвятив этим числам целую главу под названием «111...1111», вводит для них термин «repunit» (сокращение английского repeated unit — повторенная единица). Русского слова «репьюнит» еще не найти в словарях, но оно уже появляется в рефератах к зарубежным статьям, приобретаая силу нового международного термина.

Т а б л и ц а

$$\begin{aligned}
 111 &= 3 \cdot 37 \\
 1111 &= 11 \cdot 101 \\
 11111 &= 41 \cdot 271 \\
 111111 &= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \\
 1111111 &= 239 \cdot 4649 \\
 11111111 &= 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \\
 111111111 &= 3^2 \cdot 37 \cdot 333667 \\
 1111111111 &= 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091 \\
 11111111111 &= 21649 \cdot 513239 \\
 111111111111 &= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901 \\
 1111111111111 &= 53 \cdot 79 \cdot 265371653 \\
 11111111111111 &= 11 \cdot 239 \cdot 4649 \cdot 909091 \\
 111111111111111 &= 3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 2906161 \\
 1111111111111111 &= 11 \cdot 17 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 5882353 \\
 11111111111111111 &= 2071723 \cdot 5363222357 \\
 111111111111111111 &= 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 52579 \cdot 333667
 \end{aligned}$$

Математики продолжают штурмовать таблицу делителей репьюнитов, и к 1975 году n в таблице уже достигает 3000 (С. Ейтс), однако в ней еще достаточно много пробелов. (К настоящему времени часть этих пробелов ликвидирована и найдены делители репьюнитов до 162-го включительно). Отдельный интерес представляют простые репьюниты, поиск которых также продолжается. Уже доказано, что 19-й (1918 г.), 23-й (1929 г.), 317-й (1978 г.) и 1031-й (1985 г.) репьюниты простые.

Нас, однако, репьюниты интересуют не сами по себе, а в связи с периодами десятичных дробей. Существование связи между теми и другими предвидел и Бернулли, который одновременно с уже упоминавшейся таблицей делителей репьюнитов опубликовал обзор известных к тому времени результатов о периодах десятичных дробей, включавший в себя пространную таблицу этих периодов (см. рис. 2). В действительности, эта связь, как мы сейчас увидим, лежит на поверхности.

Делители репьюнитов и представление обыкновенных дробей десятичными

Начнем с трех простых наблюдений.

Наблюдение 1. Предположим, что число $999\dots999$, составленное из n девяток, делится на данное натуральное число m . Запишем частное от деления в виде n -значного числа: $999\dots999/m = a_1a_2a_3\dots a_n$ (где несколько первых цифр a_i могут быть ну-

лями). Тогда $\frac{1}{m} = 0, a_1a_2a_3\dots a_n a_1a_2a_3\dots a_n\dots$

Доказательство.

$$m \cdot 0, a_1a_2a_3\dots a_n a_1a_2a_3\dots a_n\dots = 0,999\dots999 999\dots999\dots = 1.$$

Наблюдение 2. Если число m не делится на 3, то делимость на m числа, составленного из n девяток, равносильна делимости на m числа, составленного из n единиц (т. е. репьюнита).

Это очевидно.

Наблюдение 3. Если число m не делится на 2 и на 5, то найдется репьюнит, делящийся на m .

Доказательство. Будем последовательно находить остатки от деления на m чисел 1, 11, 111 и т. д. Последовательность этих остатков беско-

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES.

I TABLE

de quelques sommes de la progression géométrique
 $1 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^n = S$
résolues en nombres premiers.

NB. On n'a pas examiné complètement si les nombres marqués d'une étoile sont premiers.

n	Valeur de S .
1	11
2	3. 37
3	11. 101
4	41. 271
5	3. 7. 11. 13. 37
6	239. 4649
7	11. 73. 101. 137
8	3. 3. 37. 333667
9	11. 41. 271. 9091
10	111111111111*
11	3. 7. 11. 13. 37. 101. 9901
12	53. 79. 265371613*
13	11. 239. 4649. 909091
14	3. 31. 37. 41. 271. 2906161*
15	11. 17. 73. 101. 137. 5881353
16	1111111111111111*
17	3. 3. 7. 11. 13. 19. 37. 52579. 333667
18	19 fois 1*
19	11. 41. 101. 271. 9091. 99009901*
20	3. 37. 239. 4649. 90909090991
21	11. 23. 111111111111*. 395256927*
22	23 fois 1*
23	3. 7. 7. 11. 11. 13. 13. 37. 101. 9901. 99990001*
24	41. 271. 100001000010000100001*
25	11. 53. 79. 265371613*. 90909090901*
26	3. 3. 3. 37. 333667. 3333333330666066667*
27	11. 29. 101. 239. 281. 4649. 909091. 121499449*
28	19 fois 1*
29	3. 7. 11. 11. 13. 17. 73. 101. 137. 211. 9091. 52081. 5881353
30	31 fois 1*

Рис. 1.

нечна, но в то же время для них имеется только m возможных значений (от 0 до $m-1$). Поэтому найдутся два разных репьюнита с одинаковыми остатками от деления на m («принцип Дирихле!»). Разность этих репьюнитов делится на m ; в то же время она имеет вид $111\dots111\ 000\dots000$, т. е. является произведением некоторого репьюнита на некоторую степень десятки 10^k . Но число m взаимно просто с 10^k ; значит, последний репьюнит делится на m .

Теперь мы можем сформулировать Важный Результат.

Теорема 1. Если натуральное число m не делится на 2 и на 5, то период десятичной дроби, равной $1/m$,

начинается сразу после запятой, его длина равна наименьшему n , при котором число, составленное из n девяток делится на m ; сам период равен частному от деления этого числа из девяток на m , записанному как n -значное число (возможно, с нулями в начале). Если m не делится и на 3, то можно также сказать, что длина периода равна номеру первого репьюнита, делящегося на m .

Все это нами уже доказано. Между прочим, из этой теоремы вытекает следующий, довольно неожиданный результат.

Следствие. Если m не делится на 2, 3 и 5, то период десятичной дроби, равной $1/m$, делится на 9.

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES.

L T A B L E

de fractions, dont les diviseurs sont des nombres premiers, réduites en décimales périodiques.

$n : D =$	$0 + (10^n - 1) : D \times 10^0 + (10^n - 1) : D \times 10^1 + \dots$ donc's ou $(D - 1) : D$	d
$n : 3 =$	$0,3 \ \&c.$	$1 = (3-1) : 2$
$n : 7 =$	$0,142857$	$6 = (7-1) : 1$
$n : 11 =$	$0,09$	$2 = (11-1) : 5$
$n : 13 =$	$0,076923$	$6 = (13-1) : 2$
$n : 17 =$	$0,0588235294117647$	$16 = (17-1) : 1$
$n : 19 =$	$0,052631578947368421$	$18 = (19-1) : 1$
$n : 23 =$	$0,0434782608695652173913$	$22 = (23-1) : 1$
$n : 29 =$	$0,0344827586206896551724137931$	$28 = (29-1) : 1$
$n : 31 =$	$0,032258064516129$	$30 = (31-1) : 2$
$n : 37 =$	$0,027$	$36 = (37-1) : 12$
$n : 41 =$	$0,02439$	$40 = (41-1) : 10$
$n : 43 =$	$0,023255813953488372093$	$42 = (43-1) : 2$
$n : 47 =$	$0,0212765957446808510638297871140425531514893617$	$46 = (47-1) : 1$
$n : 53 =$	$0,0188679243283$	$52 = (53-1) : 4$
$n : 59 =$	$0,0169491525423728813559322033898305064743762711864400775661$	$58 = (59-1) : 1$
$n : 61 =$	$0,016393446215508196711311475409836063737704918037868852459$	$60 = (61-1) : 1$
$n : 67 =$	$0,014925373134328358208955333880197$	$66 = (67-1) : 2$

Рис. 2.

Рр 2

Действительно, если m не делится на 3, то число $999\dots999/m$ делится на 9.

Утверждения о периодах в случаях, не охватываемых теоремой 1, мы приведем в качестве упражнений.

Упражнение 1. Пусть $m = 2^a 5^b m'$, где m' не делится ни на 2, ни на 5, и пусть c есть большее из чисел a, b . Тогда период десятичной дроби, равной $1/m$, начинается с $(c+1)$ -й позиции после запятой и имеет такую же длину, как период дроби $1/m'$.

Доказательство этого утверждения опирается на лемму: если p и q взаимно просты, то найдутся целые положительные A и B такие, что $Ap = Bq + 1$.

Упражнение 2. Если p и q взаимно просты, то период десятичной дроби, равной p/q , имеет такую же длину, как период десятичной дроби $1/q$.

Наконец, можно усилить наше следствие.

Упражнение 3. Если q не делится на 3, то при любом p период десятичной дроби, равной p/q , делится на 9.

Теперь мы приступаем к изучению зависимости длин периодов от знаменателей. В этом изучении нам поможет, наряду с теоремой 1,

Малая теорема Ферма

В отличие от своей «Великой теоремы» Малую теорему Пьер Ферма снабдил доказательством: он изложил его в 1640 году в одном из писем. Теорема формулируется так:

Если p — простое число и a — произвольное натуральное число, не делящееся на p , то $a^{p-1} - 1$ делится на p .

Мы не приводим доказательства этой теоремы (хотя читатель, который проделает все упражнения к этой статье, вероятно сможет ее доказать). Ее доказательство имеется в популярной литературе (см., например, книгу Р. Куранта и Г. Робинса «Что такое математика?», переизданную в Москве в 1976 г.). Нас эта теорема интересует, главным образом, как средство доказательства фундаментального свойства периодов.

Длина периода дроби с простым знаменателем

Теорема 2. Если p есть простое число, отличное от 2 и 5, то длина периода дроби $1/p$ является делителем числа $p-1$.

Доказательство. Согласно теореме 1, длина периода есть наименьшее число n такое, что число, составленное из n девяток делится на p . В то же время в силу Малой теоремы Ферма число $10^{p-1} - 1$, т. е. число, составленное из $p-1$ девяток, делится на p . Мы должны доказать, что $p-1$ делится на n . Если $n=p-1$, то доказывать нечего; предположим, что $n < p-1$. Числа, составленные из $p-1$ и n девяток, делятся на p ; дополним второе из них нулями до $(p-1)$ -значного числа и составим разность полу-

ченных чисел:

$$\begin{array}{r} 999\dots999 \ 999\dots999 \\ - 999\dots999 \ 000\dots000 \\ \hline 999\dots999 \end{array}$$

Это — число, составленное из $p-1-n$ девяток, и оно тоже делится на p . Проделав еще одно подобное вычитание, мы находим, что на p делится число, составленное из $p-1-2n$ девяток, потом — из $p-1-3n$ девяток и т. д. В конце концов мы придем к числу, в котором девяток меньше, чем n , и тут есть две возможности. Либо это число вообще будет нулем, но это как раз и значит, что $p-1$ делится на n . Либо в этом числе девяток будет больше 0, но меньше n ; а это противоречит тому, что n — наименьшая возможная длина числа из девяток, которое делится на p . Теорема доказана.

Обозначим для числа m через $L(m)$ длину периода десятичной дроби, равной $1/m$. Мы доказали, что если p просто, то $L(p)$ есть делитель числа $p-1$. Но какой? Посмотрим на таблицу И. Бернулли (рис. 2). Мы видим, что $L(3)=1$, $L(7)=6$, $L(13)=6$, $L(17)=16$, $L(31)=15$, $L(41)=5$ и т. д. Ясности не много.

С точки зрения соотношения между длиной периода дроби $1/p$ и самим p все простые числа p подразделяются на три категории:

1) «полнопериодные» простые, у которых длина периода на 1 меньше знаменателя: 7 ($L=6$), 17 ($L=16$), 19 ($L=18$), 23 ($L=22$), 29 ($L=28$) и т. д.;

2) простые с нечетной длиной периода: 3 ($L=1$), 31 ($L=15$), 37 ($L=3$), 41 ($L=5$) и т. д.;

3) «неполнопериодные» простые с четной длиной периода: 11 ($L=2$), 13 ($L=6$), 73 ($L=8$), 89 ($L=44$), 101 ($L=4$) и т. д.

Кропотливая работа математиков по выявлению какой-нибудь закономерности в расположении этих групп среди всех простых чисел увенчалась неожиданным результатом. Было обнаружено достаточно устойчивое отношение численностей этих групп в пропорции 9:8:7; при этом были использованы таблицы длин периодов

для простых знаменателей до 1370471 включительно (С. Ейтс, 1975 г.) Были получены и другие общие результаты, причем оказалось, что большое значение при определении длины периода дроби $1/p$ с простым p имеет остаток от деления числа p на ... 40. Например, если этот остаток равен 3, 27, 31, 39, то $L(p)$ нечетно, а если $p=40k \pm 7, \pm 11, \pm 17, \pm 19$, то $L(p)$ четно. Все же задача вычисления чисел $L(p)$ для простых p , видимо, далека от решения.

Случай непростого знаменателя

Упражнение 4. Если p_1 и p_2 взаимно просты между собой и с 10, то $L(p_1 p_2)$ есть наименьшее общее кратное чисел $L(p_1)$ и $L(p_2)$.

Поскольку всякое натуральное число есть произведение степеней простых, которые между собой взаимно просты, последнее утверждение сводит задачу вычисления длины периода к случаю, когда знаменатель есть степень простого числа. А здесь снова нет ясности: например, $L(3)=1$, $L(9)=1$; $L(7)=6$, $L(49)=42$; и т. д.

Теперь нам пора оставить длины периодов и обратиться к объяснению феноменов, обнаруженных в начале статьи.

Эффект круговой перестановки

Напомним, в чем он состоит. Мы видели, что шестизначный период дроби $1/7$ при умножении на 2, 3, 4, 5, 6 подвергается круговой перестановке: сколько-то цифр из конца числа переезжает в начало. Несколько иначе ведет себя при умножении на различные числа шестизначный период дроби $1/13$; именно, ... Впрочем, что именно с ним происходит, читатель может вспомнить, заглянув в начало статьи, а мы сейчас докажем теорему, более или менее объясняющую это явление.

Теорема 3. Пусть N есть период дроби $1/m$ (записанный как число, возможно, начинающееся одним или несколькими нулями), где m взаимно просто с 10, и пусть l есть остаток от деления числа 10^k

на m . Тогда число lN получается из числа N перестановкой k цифр из начала числа в конец.

Доказательство. Пусть M есть целая часть числа $10^k/m$, т. е. $10^k = Mm + l$. Умножим десятичную дробь $1/m$ на 10^k ; при этом запятая переедет на k позиций влево. Целая часть получившегося числа — это M . Отбросим целую часть. Получится число

$$10^k \frac{1}{m} - M = \frac{10^k - Mm}{m} = \frac{l}{m}.$$

Это — периодическая десятичная дробь, период которой получается из периода дроби $1/m$ круговой перестановкой цифр: k цифр переезжает из начала в конец; но в то же время это число в l раз больше числа $1/m$, а значит, и его период в l раз больше периода числа $1/m$, т. е. N . Теорема доказана.

Если число $1/m$ имеет $(m-1)$ -значный период, то доказанная теорема все объясняет. Действительно, круговыми перестановками цифр из периода можно получить $m-1$ чисел (включая его самого), и все эти числа различны. С другой стороны, умножая период на 1, 2, ..., $m-1$, мы тоже получаем $m-1$ чисел; значит, это — в точности те же числа. Если же период короче, то круговые перестановки цифр периода N не исчерпывают всех чисел вида lN с $1 \leq l \leq m-1$. Все, что можно сказать в этом случае — это что круговая перестановка цифр числа lN всегда приводит к числу вида $l'N$ — это доказывается точно так же, как теорема 3.

Интересно, что теорема 3 в некотором смысле обращается:

Теорема 4. Пусть N есть целое число (запись которого, возможно, начинается нулем или несколькими нулями), и пусть A есть число, составляемое последними k цифрами числа N . Предположим, что при перенесении k знаков из конца числа N в начало оно превращается в число lN , где l целое. Тогда периодическая десятичная дробь $0, NNN \dots$ равна $\frac{A}{10^k - 1}$.

(Последняя дробь может оказаться сократимой.)

Доказательство. Пусть n — число знаков числа N . При перенесении k знаков из конца числа N в начало оно превращается в число $\frac{N-A}{10^k} + A \cdot 10^{n-k}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{N-A}{10^k} + A \cdot 10^{n-k} &= lN, \\ N - A + A \cdot 10^n &= lN \cdot 10^k, \\ \frac{N(10^{n-k}l - 1)}{A} &= 10^n - 1, \end{aligned}$$

откуда

$$0,NNN\dots \cdot \frac{10^{n-k}l - 1}{A} = 0,999\dots = 1,$$

что нам и требуется.

Сами того не желая, мы научились решать один тип олимпиадных задач. Вот пример.

Задача. Найти все шестизначные числа, которые увеличиваются в целое число раз при перенесении последней цифры из конца в начало.

(Мы будем считать, как это обычно делается, что число начинается не с нуля; решить-то задачу мы можем и без этого предположения, но ответ будет чересчур громоздок: он будет включать в себя числа 000001, 000002, ..., 000009, 000011, 000013... Мы будем также понимать слово «увеличивается» буквально, т. е. исключим случай, когда число остается при перенесении цифры неизменным; в противном случае в ответ вошли бы числа 111111, 222222, ..., 999999.)

Решение. Пусть A — последняя цифра нашего числа, и пусть при ее перенесении в начало число увеличивается в l раз. Таким образом, $1 \leq A \leq 9$, $2 \leq l \leq 9$. В силу теоремы 4 наше число есть шестизначный период (возможно, сократимой) дроби $A/(10l-1)$. Знаменатель этой дроби до сокращения может быть одним из чисел 19, 29, 39, ..., 89; после сокращения на однозначное число знаменатель может превратиться еще в $39:3=13$, $49:7=7$, $69:3=23$. Так как период дроби шестизначный, знаменатель должен быть делителем числа $999999=3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ (см. теорему 1). Это оставляет для

него только три возможности: 7, 13, 39. Таким образом, l равно 4 или 5. При $l=4$ наша дробь равна $A/39$, где $A=4, 5, \dots, 9$ (дробь должна быть больше 0,1, поскольку период не должен начинаться с нуля). Период такой дроби есть $A \cdot 25641$ (период дроби $1/39$ есть 025641). При $l=5$ дробь равна $A/49$ и должна сокращаться на 7, что оставляет для нее единственную возможность: $1/7$; период равен 142857. Итак,

Ответ: 102564, 128205, 142857, 153846, 179487, 205128, 230769.

Упражнение 5. Решите аналогичную задачу для 13-значных чисел.

Указание. Воспользуйтесь таблицей делителей репьюнитов.

Эффект девяток

Теорема 5. Пусть q — простое число, большее 5, и пусть $1 \leq p \leq q$. Предположим, что период дроби p/q есть $2n$ -значное число N . Далее, обозначим через N_1 число, образуемое первыми n цифрами периода, и через N_2 число, образуемое его последними n цифрами. Тогда $N_1 + N_2 = 999\dots 999$ (n девяток).

Доказательство. По условию,

$$N = 10^n N_1 + N_2,$$

$$\frac{p}{q} = \frac{N}{10^{2n} - 1},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} p(10^{2n} - 1) &= Nq = \\ &= (10^n - 1)N_1q + (N_1 + N_2)q, \\ (N_1 + N_2)q &= (10^n - 1)((10^n + 1)p - Nq). \end{aligned}$$

Поскольку $2n$ есть наименьшее k , при котором $10^k - 1$ делится на q , $10^n - 1$ не делится на q , а так как q просто, то $10^n - 1$ взаимно просто с q . Значит, $N_1 + N_2$ делится на $10^n - 1$. Но в то же время N_1 и N_2 — это n -значные числа, которые не оба состоят из одних девяток. Значит, $N_1 + N_2 < 2(10^n - 1)$, и, таким образом, $N_1 + N_2 = 10^n - 1$, что и требовалось.

Заметим, что простота q использовалась нами только в одном месте: мы вывели из нее, что $10^n - 1$ взаимно просто с q . Разумеется, эта взаимная простота может наступить и при со-

ставном q , так что заключение нашей теоремы справедливо и при многих непростых знаменателях.

Еще один эффект

Рассмотрим снова период дроби $1/7$: $N=142857$. Возведем его в квадрат ($N^2=20408122449$), отделим последние шесть цифр и сложим с тем, что останется:

$$122449 + 20408 = 142857.$$

Получился снова наш период. Продолжаем подобное с периодом числа $1/17$:

$$0588235294117647^2 = \\ = 346020761245674671280276816609,$$

$$4671280276816609 + \\ + 34602076124567 = \\ = 4705882352941176.$$

Получился, правда, не наш исходный период, но число, отличающееся от него на круговую перестановку цифр. Аналогичное для периода дроби $1/19$:

$$052631578947368421^2 = \\ = 2770083102493074786703601108033241, \\ 786703601108033241 + \\ + 2770083102493074 = \\ = 789473684210526315.$$

Упражнение 6. Дайте этому объяснение.

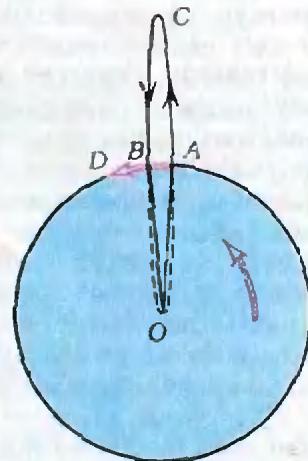
Трудная задача

(Начало см. на с. 17)

Во втором расчете, как мы уже говорили, была допущена вычислительная ошибка. Наконец, третий расчет, сделанный по формуле Гаусса, справедлив только при условии $h \ll R$, тогда как по условию задачи $h = R$.

Наш расчет опирался на законы эллиптического движения в центральном поле тяготения. Поэтому он и позволил получить правильный ответ.

Пожалуй, на этом можно завершить историю этой задачи, на первый взгляд — такой простой, но оказавшейся неожиданно такой трудной даже для весьма подготовленных людей.



Траектория, которую опишет снаряд, выпущенный на экваторе вертикально со скоростью 8 км/с . Снаряд будет двигаться по полуэллипсу ACB , орудие — по дуге AD . Все масштабы соблюдены. Направление вращения Земли указано стрелкой. Расстояние перигея эллипса от центра Земли O — 11 км и в данном масштабе неразличимо.

Задачник „Кванта“

Задачи

M1176 — M1180, Ф1183 — Ф1187

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы.

Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 октября 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте а графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—89» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1176» или «Ф1183». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задача M1180 предлагалась на заключительном этапе XXIII Всесоюзной олимпиады по математике (Рига, 1989).

M1176. Два квадрата $AKEM$ и $CNDL$ расположены на плоскости так, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, причем точки K и L лежат внутри этого четырехугольника. Докажите, что площадь этого четырехугольника равна $(MN^2 - KL^2)/4$.

С. А. Столяров

M1177. Докажите, что для положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n , не превосходящих 1, выполнено неравенство

$$(1+x_1)^{1/x_1}(1+x_2)^{1/x_2}(1+x_3)^{1/x_3}\dots(1+x_n)^{1/x_n} \geq 2^n.$$

К. П. Козась, В. М. Телеска

M1178. а) Докажите, что для нетупоугольного треугольника ABC со сторонами a, b, c , радиусом вписанной окружности r и описанной — R выполнено неравенство

$$2(R+r) \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

б) При каком условии это неравенство обращается в равенство?

З. А. Скопец

M1179. Найдите a_{1000} , если $a_1 = 0$ и при $n = 1, 2, 3, \dots$

$$а) a_{n+1} = \frac{n}{n+1}(a_n + 1);$$

$$б) a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(a_n + 1);$$

$$в) a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}(a_n + 1).$$

В. А. Вергейм

M1180. На одной из двух данных пересекающихся сфер взяты точки A и B , на другой — C и D . Отрезок AC проходит через общую точку сфер. Отрезок BD проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, содержащей центры сфер. Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую AC равны.

И. Ф. Шарыгин

Ф1183. Автобус движется с постоянной скоростью $u = 60$ км/ч, подолгу стоя на остановках. На улице ветер и идет дождь. Дождевые капли образовали на боковом стекле автобуса такую картину, как на рисунке 1. Скорость и направление ветра не меняются. Какова скорость падения капель дождя? Что можно сказать о скорости ветра? Дорога прямая, автобус не разворачивается.

А. В. Андрианов

Ф1184. Железный прут цилиндрической формы длиной 10 см нагрели в пламени газовой горелки. Температура горячего конца прутка оказалась 700°C , на расстоянии 1 см от него — 500°C , 2 см — 300°C , 3 см — 200°C , 5 см — 150°C , температура другого

Задачник „Квант“



Рис. 1.

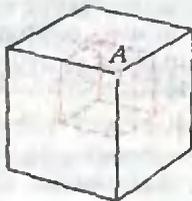


Рис. 2.

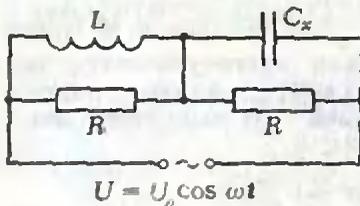


Рис. 3.

конца прутка — 100°C . Через 1 минуту температура выравнялась и оказалась равной 200°C . Оценить количество теплоты, которое прутки за это время потеряли. Удельная теплоемкость железа $460 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$, масса прутка 15 г .

А. Р. Зильберман

Ф1185. Однородно заряженный куб создает в своей вершине электрическое поле напряженностью E_0 . Из куба удаляют кубик вдвое меньших размеров (рис. 2). Чему теперь будет равна напряженность поля в точке A ?

И. Ю. Потеряйко

Ф1186. При какой величине емкости конденсатора C_x в схеме, приведенной на рисунке 3, сдвиг фаз между подаваемым напряжением и током во внешней цепи будет равен нулю при любой частоте источника? Индуктивность катушки L , сопротивление каждого резистора R . Все элементы цепи считать идеальными.

В. Е. Скворцов

Ф1187. Сани длиной $L=2 \text{ м}$ и высотой $H=0,5 \text{ м}$ едут по прямой со скоростью $v=10 \text{ м/с}$. На расстоянии $d=10 \text{ м}$ от дороги установлен штатив с фотоаппаратом, и съемку производят в момент максимального сближения.

Фотоаппарат имеет однолинзовый объектив с фокусным расстоянием $F=5 \text{ см}$. Выдержка (т. е. время, в течение которого засвечивается каждый участок фотоэмульсии) обрабатывается в этом фотоаппарате при помощи щелевого затвора, который работает следующим образом. Вдоль кадра вблизи от пленки движется с постоянной скоростью $v_0=1 \text{ м/с}$ вертикальная щель, ширину которой можно менять до получения нужной выдержки. Размер кадра $24 \times 36 \text{ мм}$. Каким окажется отношение длины к высоте у полученного на пленке достаточно резкого изображения саней?

М. Г. Гасризов

Решения задач

M1151 — M1154, Ф1163 — Ф1167

M1151. а) Докажите равенство (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{n \cdot (n-1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2.$$

б) Найдите сумму

$$\frac{1 \cdot 3!}{3} + \frac{2 \cdot 4!}{3^2} + \dots = \frac{n \cdot (n+2)!}{3^n}.$$

а) Это равенство легко доказывается по индукции. При $n=1$ оно верно: $\frac{1 \cdot 2!}{2} = \frac{3!}{2} - 2 = 1$. Предположив, что оно доказано для $n=k$, проверим, что оно верно и для $n=k+1$:

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^2} + \dots + \frac{k \cdot (k+1)!}{2^k} + \frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+1}} =$$

$$= \frac{(k+2)!}{2^k} + \frac{(k+1)(k+2)!}{2^{k+1}} - 2 = \frac{(2+k+1)(k+2)!}{2^{k+1}} - 2 =$$

$$= \frac{(k+3)!}{2^{k+1}} - 2.$$

б) Ответ: $\frac{(n+3)!}{3^n} - 6$. Можно доказать это по ин-

Задачник „Квант“

дукции так же, как в п. а), а можно оформить это рассуждение несколько по-другому. Заметим, что каждый член суммы можно записать в виде разности

$$\frac{(k+3)!}{3^k} - \frac{(k+2)!}{3^{k-1}} = \frac{(k+2)!(k+3-3)}{3^k} = \frac{k(k+2)!}{3^k}.$$

Запишем ряд таких равенств для $k=1, 2, \dots, n$ и сложим их почленно; получим:

$$\frac{(n+3)!}{3^n} - 3! = \frac{1 \cdot 3!}{3} + \frac{2 \cdot 4!}{3^2} + \dots + \frac{n(n+2)!}{3^n}.$$

Аналогично, при любом натуральном d из равенства

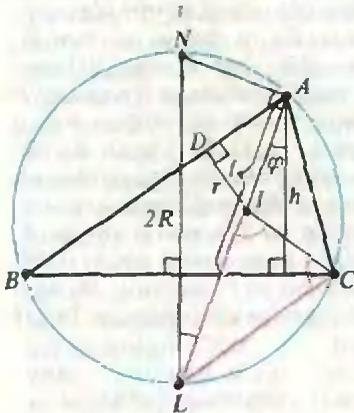
$$\frac{(k+d)!}{d^k} - \frac{(k+d-1)!}{d^{k-1}} = \frac{k(k+d)!}{d^k}$$

можно вывести обобщение результатов задач а) и б):

$$\frac{1 \cdot d!}{d} + \frac{2 \cdot (d+1)!}{d^2} + \dots + \frac{n(n+d)!}{d^n} = \frac{(n+d)!}{d^n} - d!$$

И. Б. Васильев, В. И. Жоха

M1152. Пусть h и l — высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, R и r — радиусы его описанной и вписанной окружностей. Докажите неравенство $h/l \geq \sqrt{2r/R}$.



Пусть h и l — высота и биссектриса, проведенные из вершины A треугольника ABC . Продолжим биссектрису до пересечения с описанной окружностью в точке L (см. рисунок) и проведем диаметр LN этой окружности. Он перпендикулярен хорде BC , так как L — середина дуги BC , поэтому $\angle ALN$ равен углу φ между h и l . Следовательно,

$$h/l = \cos \varphi = AL/LN = (AI + IL)/2R \geq \sqrt{AI \cdot IL}/R,$$

где I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Остается доказать, что $AI \cdot IL = 2rR$.

Опустим из точки I перпендикуляр ID на сторону AB , тогда $ID = r$ и $AI = r/\sin(\angle A/2)$. В то же время $IL = LC$, поскольку в треугольнике LIC каждый из углов при вершинах I и C равен $(\angle A + \angle C)/2$ (первый как внешний угол треугольника AIC , а второй равен $\angle ICB + \angle BCL = \angle C/2 + \angle BAL$). Но LC — хорда описанной окружности, на которую опирается угол LAC , равный $\angle A/2$, поэтому $LC = 2R \sin(\angle A/2)$. Итак,

$$AI \cdot IL = \frac{r}{\sin(\angle A/2)} \cdot 2R \sin(\angle A/2) = 2rR.$$

Из решения видно, что наше неравенство обращается в равенство, когда $AI = IL$, т. е. когда прямая OI , соединяющая центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна биссектрисе l .

Из других решений выделим тригонометрическое, использующее формулу $r = 4R \sin \frac{\angle A}{2} \sin \frac{\angle B}{2} \sin \frac{\angle C}{2}$

и равенство $\varphi = \frac{|\angle B - \angle C|}{2}$. Подробности этого решения оставим читателям.

К. Берчану, В. И. Дубровский

Задачник „Квант“

M1153. Какое наибольшее число поворотов может содержать замкнутый маршрут ладьи, обходящий по одному разу все клетки шахматной доски 8×8 клеток?

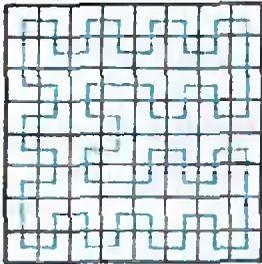


Рис. 1.

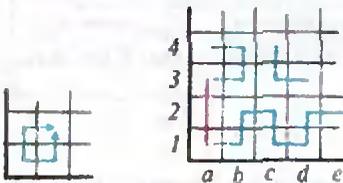
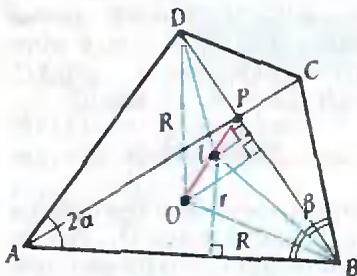


Рис. 2.

Рис. 3.

M1154. Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность и описан около другой окружности, то прямая, проведенная через центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.



Ответ: 56 поворотов. Маршрут с 56 поворотами показан на рисунке 1. Докажем, что это число нельзя преувеличить.

Назовем клетку доски *коридором* для данного маршрута, если в ней ладья не делает поворота. Заметим, что из каждой пары клеток, смежных с угловыми, хотя бы одна является коридором — иначе в клетке, соседней с соответствующей угловой по диагонали, ладья побывает дважды (рис. 2).

Разобьем доску на 4 квадрата 4×4 . В каждом из них есть коридор, соседний с угловой клеткой. Покажем, что кроме него есть еще хотя бы один коридор. Рассмотрим, например, левый нижний квадрат и допустим, что клетка a_2 — коридор. Предположим, что других коридоров в этом квадрате нет. Тогда очевидно, что маршрут последовательно проходит по клеткам $b_2, b_1, a_1, a_2, a_3, b_3, b_4$ (рис. 3). Следующей будет клетка a_4 , иначе мы в нее никогда не попадем (или маршрут не замкнется). Теперь можно аналогично продолжить маршрут в другую сторону: $b_2, c_2, c_1, d_1, d_2, e_2$. Из полученного рисунка видно, что маршрут должен содержать участок d_3, c_3, c_4 , следовательно, одна из клеток — d_3 или c_4 — коридор (это доказывается так же, как для угловых клеток — см. начало решения).

Итак, число коридоров — не меньше $2 \times 4 = 8$, а число поворотов — не больше $64 - 8 = 56$.

М. Г. Хованов

Введем следующие обозначения: $ABCD$ — данный четырехугольник; $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ — величины его углов при вершинах A, B, C, D ; O и I, R и r — центры описанной и вписанной окружностей и их радиусы, P — точка пересечения диагоналей (см. рисунок). Для определенности будем считать, что углы 2α и 2β — не тупые, а значит, $2\gamma = \pi - 2\alpha$ и $2\delta = \pi - 2\beta$ — не острые. Покажем, что тогда точки O и I лежат внутри угла APB и отношения расстояний от этих точек до сторон этого угла (диагоналей) одинаковы: $\rho(O, BD)/\rho(O, AC) = \rho(I, BD)/\rho(I, AC)$ (буквой ρ обозначены расстояния). Отсюда, очевидно, будет следовать утверждение задачи.

Точка O лежит по ту же сторону от BD , что и точка A , (или непосредственно на BD), так как угол BCD не острый. Точка I тоже лежит по эту сторону от BD , поскольку угол при вершине I четырехугольника $BCDI$ равен

$$2\pi - \beta - 2\gamma - \delta = \pi - (\beta + \delta) + \pi - 2\gamma = \frac{\pi}{2} + 2\alpha \leq \pi$$

(мы учли, что $\beta + \delta = \pi/2$).

Аналогично проверяем, что обе точки — O и I — лежат по одну сторону с точкой B относительно AC . Следовательно, эти точки лежат внутри угла APB .

Далее, отношение расстояний от O и I до BD равно отношению площадей треугольников OBD и IBD

$$\frac{S_{OBD}}{S_{IBD}} = \frac{OB \cdot OD \sin \angle BOD}{IB \cdot ID \sin \angle BID}.$$

Задача «Кванта»

Но $OB=OD=R$, $\angle BOD=2\angle BAD=4\alpha$ (центральный угол вдвое больше соответствующего вписанного), $IB=r/\sin \beta$, $ID=r/\sin \delta=r/\cos \beta$ (см. рисунок) и, как мы показали, $\angle BID=\pi/2+2\alpha$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\rho(O, BD)}{\rho(I, BD)} &= \frac{R^2 \sin 4\alpha \sin \beta \cos \beta}{r^2 \sin (\pi/2 + 2\alpha)} = \\ &= \frac{R^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \sin 2\beta}{r^2 \cos 2\alpha} = \frac{R^2}{r^2} \sin 2\alpha \sin 2\beta. \end{aligned}$$

Из симметрии задачи ясно, что и отношение $\rho(O, AC)/\rho(I, AC)$ равно той же величине, поэтому $\rho(O, BD)/\rho(O, AC) = \rho(I, BD)/\rho(I, AC)$, что и требовалось доказать.

Вообще, «вписанно-описанный» четырехугольник имеет целый ряд красивых свойств. Приведем некоторые из них, тесно связанные с данной задачей.

Пусть Q_1 — четырехугольник с вершинами в точках касания вписанно-описанного четырехугольника $ABCD$ с вписанной в него окружностью, а Q_2 — четырехугольник, ограниченный перпендикулярами к отрезкам IA , IB , IC , ID в их концах. Тогда 1) диагонали Q_1 перпендикулярны и пересекаются в той же точке P , что и диагонали $ABCD$; 2) четырехугольники Q_1 и Q_2 гомотетичны, причем центр гомотетии лежит на прямой PI ; 3) на этой же прямой лежит центр описанной окружности четырехугольника Q_2 и центры тяжести четырехугольников Q_1 и Q_2 .

В. Н. Дубровский

Ф1163. Из-за малого коэффициента трения автомобиль не может двигаться по льду с ускорением, превосходящим по модулю $a=0,5 \text{ м/с}^2$. По условиям соревнования водителю необходимо из точки A за наименьшее время попасть в точку B , находящуюся на прямой, перпендикулярной направлению начальной скорости автомобиля (рис. 1). Каково минимальное возможное время, если расстояние $AB=375 \text{ м}$, а начальная скорость $v=10 \text{ м/с}$? По какой траектории при этом должен двигаться автомобиль? Ответьте на аналогичные вопросы для случая, когда финиш находится в точке C , $BC=200 \text{ м}$.

Перейдем в систему отсчета, в которой автомобиль в начальный момент времени покоится, а точка B движется с постоянной скоростью v . В этой системе отсчета автомобиль для скорейшей встречи с точкой B , очевидно, должен двигаться по некоторой прямой с постоянным ускорением, равным a . Направление прямой определяется тем, что в некоторой точке D должна произойти встреча. Для треугольника ABD (рис. 2), обозначив $AB=b$, имеем

$$b^2 + (vt)^2 = \left(\frac{at^2}{2}\right)^2.$$

Решая это уравнение, находим

$$t = \sqrt{\frac{2v^2}{a^2} + \sqrt{\left(\frac{2v^2}{a^2}\right)^2 + \frac{4b^2}{a^2}}} = 50 \text{ с}.$$

Поскольку оптимальное движение автомобиля является равноускоренным, его траектория в системе отсчета, связанной с землей, будет параболой.

Стратегия для скорейшей встречи с точкой C аналогична разобранный выше. Однако для нахождения времени до встречи в точке E (рис. 3) придется решать уравнение четвертой степени общего вида

$$b^2 + (vt+c)^2 = \left(\frac{at^2}{2}\right)^2,$$

Задача «Кванта»

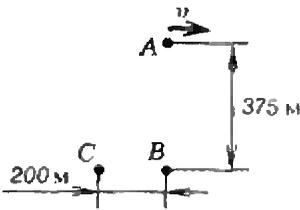


Рис. 1.

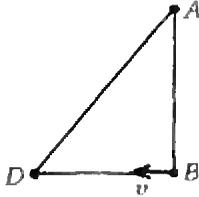


Рис. 2.

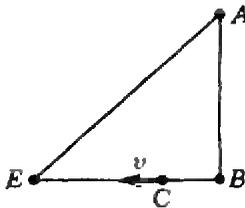


Рис. 3.

где $c = BC$, или

$$t = \sqrt[4]{\frac{4}{a^2} (b^2 + (vt + c)^2)}$$

Это уравнение можно решить приближенно, пользуясь методом итерации, суть которого состоит в следующем. Пусть надо решить уравнение вида $f(t) = t$. В качестве приближенного берем какое-нибудь значение $t = t_0$ и составляем последовательность

$$t_1 = f(t_0), t_2 = f(t_1), \dots, t_n = f(t_{n-1}).$$

Если эта последовательность имеет предел S и функция $f(t)$ непрерывна в точке S , то S — корень уравнения (*).

В нашем случае при условии $t_0 = 0$ последовательность будет иметь вид

$$t_1 = f(t_0), t_2 = f(t_1), \dots$$

$$\dots, t_n = \sqrt[4]{\frac{4}{a^2} (b^2 + (vt_{n-1} + c)^2)}$$

Подставив численные значения, приходим к результату

$$t \approx 59,2 \text{ с.}$$

При этом, как показывает более детальное изучение последовательности, при $n = 4$ достигается точность в один процент, а каждые два дополнительных шага (вычисление двух последующих членов последовательности) улучшают точность в десять раз.

Для случая произвольного расположения точки финиша при итерационном решении уравнения (*), где перед $c = BC$ может быть как знак плюс, так и знак минус, надо соблюдать известную осторожность, связанную с возможной неоднозначностью решения и правильным выбором нулевого приближения итерации.

И еще одно замечание. Движение по параболе с постоянным вектором ускорения потребует, конечно, немалой сноровки от водителя.

А. Н. Коротков, Е. Н. Юносов

Ф1164. В строительстве используются так называемые предварительно напряженные железобетонные конструкции. Изготовление такой балки происходит следующим образом. Стальной стержень длиной l_1 растягивают до длины l_2 , после чего заливают жидким бетоном. После затвердевания бетона стержень освобождают от растяги-

Пусть длина железобетонной балки после того, как со стального стержня будет снято растягивающее усилие, равна l_0 ($l_1 < l_0 < l_2$). При этом стержень растянут на величину $\Delta l_1 = l_0 - l_1$, а затвердевший бетон сжат на величину $\Delta l_2 = l_2 - l_0$. Согласно закону Гука, для такой деформации стержня необходима сила

$$F_1 = E_1 S_1 \Delta l_1 / l_1,$$

где S_1 — площадь его поперечного сечения, E_1 — модуль Юнга стали. Аналогично, для деформации бетона нужна сила

$$F_2 = E_2 S_2 \Delta l_2 / l_2,$$

где S_2 и E_2 — площадь поперечного сечения и модуль

вающего усилия. Найти длину образовавшейся железобетонной балки и ее модуль Юнга. Площади сечения стержня и балки и модули Юнга стали и бетона считать известными. Чем предварительно напряженный железобетон лучше простого железобетона?

Задача «Кванта»

Юнга бетонного бруска (без стержня). Естественно, что при отсутствии внешних сил сила сжатия бетона уравновешивает силу растяжения стержня:

$$F_1 = F_2.$$

Отсюда, используя предыдущие выражения, найдем искомую длину железобетонной балки

$$l_0 = \frac{E_2 S_2 + E_1 S_1}{E_1 S_1 / l_1 + E_2 S_2 / l_2}.$$

Для определения модуля Юнга E_0 железобетонной балки рассчитаем силу, которая необходима для растяжения балки на величину Δl_0 . При такой деформации стержень будет растянут на $\Delta l_1 + \Delta l_0$ (по сравнению с первоначальной длиной l_1), и сила растяжения будет равна

$$F'_1 = E_1 S_1 (\Delta l_0 + \Delta l_1) / l_1.$$

Бетонный брус будет сжат на $\Delta l_2 - \Delta l_0$ (по сравнению со своей первоначальной длиной l_2), и сила его сжатия будет равна

$$F'_2 = E_2 S_2 (\Delta l_2 - \Delta l_0) / l_2.$$

(Если $\Delta l_0 > \Delta l_2$, то F'_2 будет силой растяжения, а не сжатия бетона.) Результирующая сила, необходимая для растяжения железобетонной балки, равна

$$F_0 = F'_1 - F'_2 = E_1 S_1 (\Delta l_0 + \Delta l_1) / l_1 - E_2 S_2 (\Delta l_2 - \Delta l_0) / l_2,$$

или, учитывая равенство $E_1 S_1 \Delta l_1 / l_1 = E_2 S_2 \Delta l_2 / l_2$,

$$F_0 = E_1 S_1 \Delta l_0 / l_1 + E_2 S_2 \Delta l_0 / l_2.$$

Вынесем Δl_0 за скобки, умножим и разделим на S_2 / l_2 (считая $S_1 \ll S_2$) и получим

$$F_0 = \left((E_1 S_1 / l_1 + E_2 S_2 / l_2) \frac{l_0}{S_2} \right) S_2 \frac{\Delta l_0}{l_0}.$$

Нетрудно видеть, что выражение во внешних скобках и есть модуль Юнга железобетонной балки E_0 . Используя формулу для l_0 , найдем

$$E_0 = E_2 + \frac{S_1}{S_2} E_1.$$

Интересно отметить, что такой же модуль Юнга будет и у балки, изготовленной без предварительного растяжения стального стержня. Преимущество предварительно напряженного железобетона состоит в том, что бетонное основание в таких конструкциях испытывает деформацию сжатия, даже если сама конструкция в целом испытывает деформацию растяжения. Поскольку прочность бетона при сжатии значительно больше его прочности при растяжении, существенно уменьшается вероятность образования трещин в бетонном основании.

Б. И. Клячин

Ф1165. Из бесконечной квадратной проводящей сетки с сопротивлением

Начнем с точек A и B . Перерисуем схему так, как изображено на рисунке 2. Подключим к точкам A и B схемы (рис. 3) два одинаковых источника тока

Задача «Кванта»

каждого ребра r удалили часть проводников — так, как показано на рисунке 1. Найти сопротивление между точками A и B , B и C , A и C .

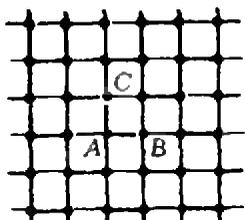


Рис. 1.

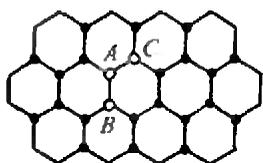


Рис. 2.

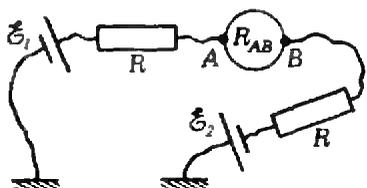


Рис. 3.

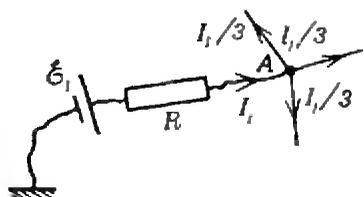


Рис. 4.

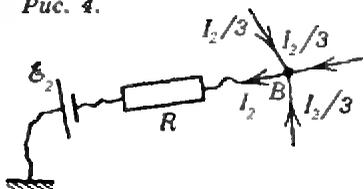


Рис. 5.

с ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ через два одинаковых резистора сопротивлением $R \gg r$ (внутренним сопротивлением источников пренебрежем). Положим $r = 1$ Ом и подберем значения \mathcal{E} и R так, чтобы $\mathcal{E}/R = 1$ А.

Рассмотрим сначала подключение лишь одного источника к точке A и получим следующую схему разветвления вытекающего в узел A тока $I_1 = \mathcal{E}/(R+r) \approx 1$ А (здесь r — искомое сопротивление между точками A и B) — рисунок 4. Оставляя ватем только источник с ЭДС \mathcal{E}_2 , получим ситуацию, когда из узла B вытекает ток $I_2 = \mathcal{E}/(R+r) \approx 1$ А. Этот ток стекается из трех ближайших к B узлов и через источник уходит на «бесконечность» (рис. 5).

Теперь подключим к точкам A и B оба источника. Тогда из принципа суперпозиции и из условия $R \gg r$ получим, что по проводнику AB будет протекать ток $I_{AB} = (I_1 + I_2)/3 = 2/3$ А и напряжение на проводнике будет равно

$$U_{AB} = \frac{2}{3} \text{ А} \cdot 1 \text{ Ом} = \frac{2}{3} \text{ В.}$$

С другой стороны, на схему подано общее напряжение $2\mathcal{E}$ и в нее втекает ток $I \approx 2\mathcal{E}/(2R) = 1$ А. Следовательно,

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{2}{3} \text{ Ом.}$$

Случай, когда внешнее напряжение прикладывается к точкам A и C , совершенно аналогичен предыдущему:

$$R_{AC} = \frac{2}{3} \text{ Ом.}$$

Нам осталось найти сопротивление между точками B и C . Подключение только одного источника к точке B дает, что по ребру AB будет течь ток $I_1/3$, а по ребру BC — ток $I_1/6$. Подключение затем к узлу C второго источника, с учетом соображений симметрии и принципа суперпозиции, дает

$$U_{BC} = 1 \text{ Ом} \left(\frac{1}{3} \text{ А} + \frac{1}{6} \text{ А} \right) + 1 \text{ Ом} \left(\frac{1}{3} \text{ А} + \frac{1}{6} \text{ А} \right) = 1 \text{ В}$$

и

$$R_{BC} = \frac{U_{BC}}{I} = 1 \text{ Ом.}$$

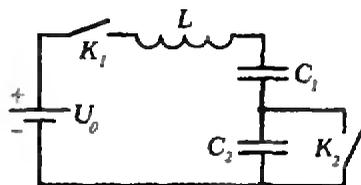
С. С. Кротов

Ф1166. В схеме, приведенной на рисунке, замыкают ключ K_1 (при замкнутом ключе K_2), а в тот момент, когда заряд на конденсаторе C_1 становится максимальным, ключ K_2 размыкают. Найти максималь-

После замыкания ключа K_1 происходит зарядка конденсатора C_1 , а заряд конденсатора C_2 остается равным нулю, поскольку C_2 замкнут.

В тот момент, когда заряд q_1 конденсатора C_1 становится максимальным, ток в цепи оказывается равным нулю. Найдем величину заряда $q_{1 \text{ макс}}$, исходя из энергетических соображений: работа источника тока равна энергии электрического поля конденсатора C_1 —

ный заряд конденсатора C_2 . Параметры элементов схемы, указанные на рисунке, считать заданными.



Задача «Кванта»

$$q_{1 \max} U_0 = \frac{q_{1 \max}^2}{2C_1},$$

откуда

$$q_{1 \max} = 2C_1 U_0.$$

После размыкания ключа K_2 этот заряд оказался «запертым» на замкнутых между собой пластинах конденсаторов C_1 и C_2 . Пусть через некоторое время после размыкания на конденсаторе C_2 появился заряд q_2 . Если предположить, что заряд конденсатора C_1 продолжал расти, то его заряд q_1 будет связан с зарядом q_2 соотношением

$$q_1 = q_{1 \max} + q_2.$$

Для нахождения максимального заряда конденсатора C_2 опять воспользуемся законом сохранения энергии: работа батареи после размыкания ключа K_2 равна приращению энергии конденсаторов —

$$q_{2 \max} U_0 = \frac{(q_{1 \max} + q_{2 \max})^2}{2C_1} + \frac{q_{2 \max}^2}{2C_2} - \frac{q_{1 \max}^2}{2C_1},$$

откуда

$$q_{2 \max} = - \frac{2C_1 C_2 U_0}{C_1 + C_2}.$$

Знак «—» означает, что наше предположение относительно роста заряда q_1 не верно, заряд на конденсаторе C_1 будет уменьшаться. При этом на верхней пластине конденсатора C_2 будет «—», а на нижней «+».

В. В. Можжев

Ф1167. Длинный железнодорожный состав, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом α . Когда состав полностью остановился, на горке находилась половина его длины (см. рисунок). Сколько времени прошло от начала подъема до остановки? Длина состава L , трением пренебречь.



Пусть масса всего состава M , а длина части состава, въехавшей на горку, x . Тогда масса этой части составляет Mx/L .

Выберем координатную ось X с началом у основания горки и направим ее вверх по горке. Запишем для состава второй закон Ньютона в проекциях на выбранную ось:

$$Ma = - \frac{Mx g \sin \alpha}{L},$$

или, учитывая, что $a = x''$,

$$x'' = - \frac{g \sin \alpha}{L} x.$$

Это уравнение — не что иное, как уравнение гармонических колебаний с периодом $T = 2\pi \sqrt{L/(g \sin \alpha)}$. Время t движения состава до остановки равно четверти периода колебаний, т. е.

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g \sin \alpha}}.$$

А. И. Вуздин

Калейдоскоп "Кванта"



...мелькая наблюдать и определить движения тела, имеющего конечную величину, не определив сначала, какое движение имеет каждая его маленькая частичка или точка.

Л. Эйлер

А так ли хорошо вы знаете,

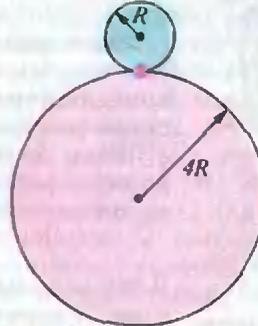
как движется точка?



Замечательную возможность изучать самые разнообразные, в том числе и очень сложные, движения предоставляет сведение их к простейшему — движению точки вдоль линии. Но и такое, на первый взгляд, нехитрое движение требует для своего описания введения целого ряда понятий. В этом выпуске «Калейдоскопа» мы будем «работать» с несколькими из них — траекторией, координатой, путем и перемещением. За каждым понятием — долгая история, связанная со становлением законов, которым подчиняются движения тел на Земле и в космосе.

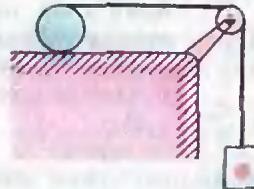
Вопросы и задачи

1. Столкнутся ли два шара, если известно, что траектории их центров пересекаются?
2. Круг радиусом R катится по кругу радиусом $4R$. Сколько



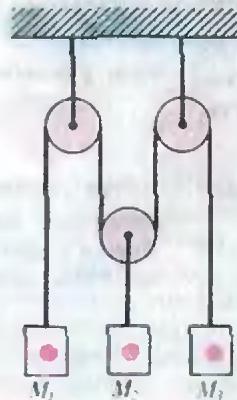
оборотов совершит малый круг по возвращении в первоначальное положение?

3. Нерастяжимая нить намотана на цилиндр, а другим концом привязана к грузу. Какой путь пройдет груз,

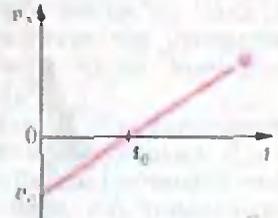


когда катящийся без скольжения цилиндр, длина окружности которого равна l , сделает один оборот?

4. К нерастяжимой нити, перекинутой через блоки, привязаны грузы, как показано

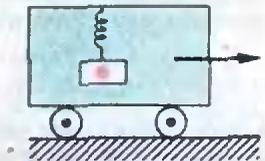


на рисунке. Найдите направление и модуль вектора перемещения груза M_2 , если груз M_1 переместился на 5 см вверх, а груз M_3 — на 3 см вниз.



5. Тело движется по прямой, выйдя из точки с координатой x_0 , причем проекция его скорости на ось X меняется так, как показано на графике.

6. Какова (относительно Земли) траектория колеблющегося



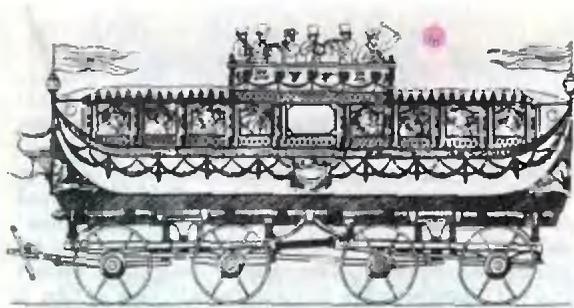
на пружинке грузика, помещенного в равномерно движущийся вагон?

7. По какой траектории движется частица в бегущей продольной волне?

8. Мальчик бросает мячи из вагона в сторону, противоположную движению поезда. Как будут двигаться мячи по отношению а) к вагону? б) к полотну дороги?

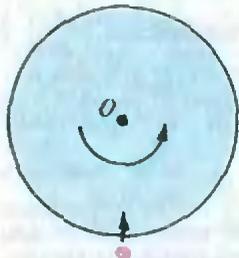
9. По какой траектории станет двигаться заряженная частица, влетающая в однородное электрическое поле под углом к силовым линиям?

10. Существуют ли такие точки движущегося вагона, которые



перемещаются на вперед, а назад? Каковы траектории этих точек?
11. Мелок пускают по диаметру круга. За

Микроопыт
Подвесьте тяжелый грузик (гирьку, металлический шарик) на длинной нити и отведите его на небольшой угол из положения равновесия. Отпустите грузик а) без начальной скорости; б) со скоростью, направленной перпендикулярно вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса. По каким траекториям начнет двигаться грузик?



время, пока круг делает половину оборота, мелок относительно Земли может пройти путь, равный диаметру круга. Какой след оставит мелок на круге? Трение пренебрежимо мало.



12. Осколки снаряда, взорвавшегося на вершине башни, разлетелись с одинаковой начальной скоростью v_0 . Как будут располагаться в пространстве осколки после взрыва? По какой траектории движется каждый осколок?

Любопытно, что...
...современное понимание трехмерности физического пространства появилось, по-видимому, в XVII веке, когда Декарт изобрел прямоуголь-



ную систему координат. В древности понятие размерности пространства не применялось, так как отсутствовало понятие координат.

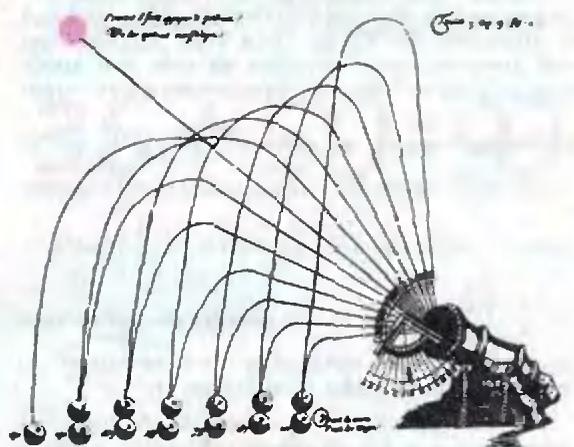
...только на полюсах Земли тела падают строго по вертикали. Во всех остальных точках планеты траектория свободно падающего тела отклоняется к востоку за счет так называемой силы Кориолиса, возникающей во вращающихся системах.



...со времен Аристотеля считалось, что траектории летательных



снарядов состоит из прямых и сопрягающих их дуги. И лишь Галилею удалось установить, что траекторией тела, брошенного под углом к горизонту в безвоздушном пространстве, является парабола. А итальянец Тарталья (1500—1557), хотя и не знал законов, управляющих движением снарядов, пришел к выводу, что наибольшей дальности стрельбы можно достичь, если наклонить орудие к горизонту под углом 45° .



Что читать в «Кванте» о движении точки (публикации последних лет)

- 1. «Траектория, путь, перемещение» — 1984, № 9, с. 19;
- 2. «Как построить траекторию?» — 1987, № 7, с. 26;
- 3. «Легко ли описывать движение?» — 1987, № 9, с. 38;
- 4. «Основная задача кинематики» — 1988, № 9, с. 58.

Снова о счастливых билетах

«Квант» уже не раз писал о счастливых билетах (1975, № 7, 1976, № 12, 1978, № 11, 1988, № 1 и № 4), т. е. билетах, сумма первых трех цифр которых равна сумме трех последних цифр. Число счастливых билетов N выражается с помощью интеграла:

$$N = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^6(10x)}{\sin^6 x} dx. \quad (1)$$

В этой замечательной формуле число 6 показывает, что вычисляется число шестизначных счастливых билетов, а число 10 указывает на десятичную систему счисления. Если основание системы счисления и число цифр билета иные, то формулу нужно изменить очевидным образом.

Г. А. Гальперин из Москвы и А. В. Корлюков из Гродно задались вопросом: что будет, если вычислять число счастливых билетов N по приближенной формуле

$$N = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad (2)$$

где $x_k = x_0 + k\pi/n$, $f(x) = \sin^6(10x)/\sin^6 x$. Они обнаружили, что при любом $n \geq 28$ и любом x_0 равенство (2) является точным! (Для билетов длины $2S$ и p -ичной системы счисления нужно брать $n \geq 1 + Sp - 1$.)

Доказательство можно получить, слегка модифицировав вывод формулы (1), приведенный в «Кванте» № 11 за 1978 год. Другой способ доказательства основан на том, что дробь $(\sin(px)/\sin x)^{2S}$ можно представить как «тригонометрический многочлен» $f(x) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k \times \sin(kx) + b \cos(kx)$; для всякого такого многочлена выполнено равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_0 + k\pi/n)$$

при достаточно большом n (подумайте, как связано n со «степенью» n_0 тригонометрического многочлена!).

Вычислять число счастливых билетов на компьютере и на микрокалькуляторе удобнее по формуле (2), чем (1), тем более, что интеграл все равно заменяется на приближенное значение. Кроме того, из формулы (2) можно получить интересные следствия.

Пусть, например, длина билета равна 2, а система счисления десятичная. Тогда в формуле (2) достаточно взять 10 слагаемых. В качестве точек x_k берем $\frac{\pi}{20}, \frac{3\pi}{20}, \dots, \frac{19\pi}{20}$. Число N очевидно равно 10, а $\sin^6(10x_k) = 1$ для всех k . Поэтому

$$\frac{1}{\sin^2(\pi/10)} + \frac{1}{\sin^2(3\pi/10)} = 12.$$

При других S и p читатели могут получить аналогичные равенства самостоятельно.

А. А. Михайлов из г. Стучка Латвийской ССР предлагает новый подход к задаче о счастливых билетах длины $2n$ в p -ичной системе счисления. Вот его рассуждение. Прежде всего, число счастливых билетов равно числу билетов, сумма цифр которых равна $n(p-1)$ (попробуйте это доказать!). Это число, в свою очередь равно коэффициенту при $x^{n(p-1)}$ многочлена $f(x) = (1-x^{p^{2n}})/(1-x)^{2n} = (1-x^{p^{2n}}) \times (1-x)^{-2n}$.

Чтобы найти этот многочлен, можно воспользоваться биномом Ньютона.

$$(1+t)^k = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} t^s,$$

где биномиальные коэффициенты $\binom{k}{s}$

равны $k!/S!(k-S)!$ при $0 \leq k \leq S$ и 0 при $k > S \geq 0$. Биномиальная формула верна и для отрицательных показателей k ; при этом $\binom{-k}{s} = (-1)^s \binom{k+S-1}{s}$. Если выразить

оба сомножителя, входящих в $f(x)$, с помощью бинорма, то нетрудно найти коэффициент при $x^{n(p-1)}$. Окончательная формула А. А. Михайлова для числа счастливых билетов выглядит так:

$$N_{2n}^p = \sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{2n}{s} \binom{(n-S)p + n - 1}{2n-1}, \quad (3)$$

где $m = \left\lfloor n \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\rfloor$, квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Частный случай этой формулы для десятичной системы обнаружили также студенты из Иркутска Д. Балябин и С. Кривошеин.

Для числа обычных счастливых билетов получаем

$$N_6^{10} = \binom{6}{0} \binom{32}{5} - \binom{6}{1} \binom{22}{5} + \binom{6}{2} \binom{12}{5} = 201\,376 - 6 \cdot 26\,334 + 15 \cdot 792 = 55\,252.$$

Как видите, формула (3) позволяет вычислить число счастливых билетов довольно просто!

Для $p=2$ есть еще более простое выражение для N . Действительно, в этом случае

$$f(x) = (1+x)^{2n}, \text{ поэтому } N = \binom{2n}{n}.$$

Кроме того, А. А. Михайлов отмечает, что число счастливых билетов совпадает с числом целых точек, лежащих строго внутри $2n$ -мерного куба $[0, p+1]^{2n}$ на проходящей через его центр гиперплоскости, перпендикулярной главной диагонали. Это число часто встречается в работах по современной вещественной алгебраической геометрии и называется числом Петровского (в честь академика И. Г. Петровского (1901—1973); см. комментарий в книге И. Г. Петровского «Избранные труды», выпущенной в 1986 году издательством «Наука»).

*) Их также обозначают C_n^S .

„Квант“ для младших школьников

Задачи

1. Лева и Паша живут в одном доме. Номера их квартир — двузначные числа с такой особенностью: если к сумме цифр номера квартиры прибавить квадрат разности цифр номера, то снова получится этот номер. Найдите номера квартир Паши и Левы.

2. Решите арифметический ребус, который вы видите на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3. Можно ли из двух одинаковых кругов вырезать по остроугольному треугольнику с вершинами на окружности так, чтобы один из них мог поместиться целиком внутри другого?

4. На микрокалькуляторе всякая цифра записывается с помощью не более семи маленьких отрезочков. В примере, изображенном на рисунке, у каждой из цифр один отрезочек стоит не на своем месте. Переложите отрезочки так, чтобы равенство стало верным.

5. Чему равна сумма чисел в десятой строчке арифметического треугольника (см. рисунок)? в сотой? а в n -й строчке?

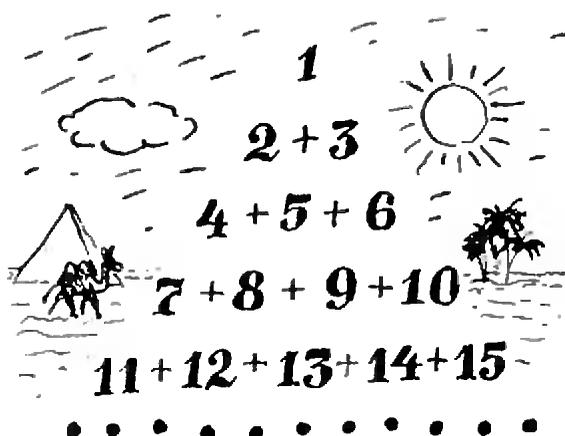
Эти задачи нам предложили ученик 7 класса школы № 62 г. Омска М. Завьялов, ученик 9 класса ФМШ при ЕРГУ А. Аюпяк, девятиклассник М. Марченко и десятиклассник С. Медьник из г. Гайворон, Н. И. Авилов, А. П. Савин.



$$(K+B+A+H+T)^3 = \text{КВАНТ}$$



$$36 + 50 = 93$$



НАГРАДА

В этом номере мы предлагаем нашим «младшим» читателям рассказ известного советского популяризатора математики и физики Я. И. Перельмана, который мы перепечатаем из его книги «Живая математика» (М.: Наука, 1959).

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

Вот что, по преданию, произошло много веков назад в древнем Риме.*)

Полководец Теренций, по приказу императора, совершил победоносный поход и с трофеями вернулся в Рим. Прибыв в столицу, он просил допустить его к императору.

Император ласково принял полководца, сердечно благодарил его за военные услуги империи и обещал в награду дать высокое положение в сенате.

Но Теренцию нужно было не это. Он возразил:

— Много побед одержал я, чтобы возвысить твое могущество, государь, и окружить имя твое славою. Я не страшился смерти, и будь у меня не одна, а много жизней, я все их принес бы тебе в жертву. Но я устал воевать; прошла молодость, кровь медленнее бежит в моих жилах.

*) Рассказ в вольной передаче заимствован из старинной латинской рукописи, принадлежащей одному из частных книгохранилищ Англии.



Наступила пора отдохнуть в доме моих предков и насладиться радостями домашней жизни.

— Чего желал бы ты от меня, Теренций? — спросил император.

— Выслушай со снисхождением, государь! За долгие годы военной жизни, изо дня в день обагрывая меч свой кровью, я не успел устроить себе денежного благополучия. Я беден, государь...

— Продолжай, храбрый Теренций.

— Если хочешь даровать награду скромному слуге твоему, — продолжал ободренный полководец, — то пусть щедрость твоя поможет мне дожить мирно в достатке годы подле домашнего очага. Я не ищу почестей и высокого положения во всемогущем сенате. Я желал бы удалиться от власти и от жизни общественной, чтобы отдохнуть на покое. Государь, дай мне денег для обеспечения остатка моей жизни.

Император — гласит предание — не отличался широкой щедростью. Он любил копить деньги для себя и скупно тратил их на других. Просьба полководца заставила его задуматься.

— Какую же сумму, Теренций, считал бы ты для себя достаточной? — спросил он.

— Миллион динариев, государь.

Снова задумался император. Полководец ждал, опустив голову. Наконец император заговорил:

— Доблестный Теренций! Ты великий воин, и славные подвиги твои заслужили щедрой награды. Я дам тебе богатство. Завтра в полдень ты услышишь здесь мое решение.

Теренций поклонился и вышел.

На следующий день в назначенный час полководец явился во дворец императора.

— Привет тебе, храбрый Теренций! — сказал император.

Теренций смиренно наклонил голову.

— Я пришел, государь, чтобы выслушать твое решение. Ты милостиво обещал вознаградить меня.

Император ответил:

— Не хочу, чтобы такой благородный воитель, как ты, получил за свои

подвиги жалкую награду. Выслушай же меня. В моем казначействе лежит 5 миллионов медных брассов*). Теперь внимай моим словам. Ты войдешь в казначейство, возьмешь одну монету в руки, вернешься сюда и положишь ее к моим ногам. На другой день вновь пойдешь в казначейство, возьмешь монету, равную 2 брассам, и положишь здесь рядом с первой. В третий день принесешь монету, стоящую 4 брасса, в четвертый — стоящую 8 брассов, в пятый — 16, и так далее, все удваивая стоимость монеты. Я прикажу ежедневно готовить для тебя монеты надлежащей ценности. И пока хватит у тебя сил поднимать монеты, будешь ты выносить их из моего казначейства. Никто не вправе помогать тебе; ты должен пользоваться только собственными силами. И когда заметишь, что не можешь уже больше поднять монету — остановись: уговор наш кончится, но все монеты, которые удалось тебе вынести, останутся твоими и послужат тебе наградой.

Жадно впивал Теренций каждое слово императора. Ему чудилось огромное множество монет, одна больше другой, которые вынесет он из государственного казначейства.

— Я доволен твоею милостью, государь, — ответил он с радостной улыбкой. — Поистине щедра награда твоя!

Начались ежедневные посещения Теренцием государственного казначейства. Оно помещалось недалеко от приемной залы императора, и первые переходы с монетами не стоили Теренцию никаких усилий.

В первый день вынес он из казначейства всего один брасс. Это небольшая монета, 21 мм в поперечнике и 5 г весом**).

Легки были также второй, третий, четвертый, пятый и шестой переходы, когда полководец выносил монеты двойного, 4-кратного, 8-кратного, 16-кратного и 32-кратного веса.

*) Мелкая монета, пятая часть динария.

**) Масса пятикопеечной монеты современной чеканки.

Седьмая монета весила на наши современные меры 320 граммов и имела в поперечнике $8\frac{1}{2}$ см (точнее 84 мм *).

На восьмой день Теренцию пришлось вынести из казначейства монету, соответствовавшую 128 единичным монетам. Она весила 640 г и была шириною около $10\frac{1}{2}$ см.

На девятый день Теренций принес в императорскую залу монету в 256 единичных монет. Она имела 13 см в ширину и весила более $1\frac{1}{4}$ кг.

На двенадцатый день монета достигла почти 27 см в поперечнике и весила $10\frac{1}{4}$ кг.

Император, до сих пор смотревший на полководца приветливо, теперь не скрывал своего торжества. Он видел, что сделано уже 12 переходов, а вынесено из казначейства всего только 2000 с небольшим медных монеток.

Тринадцатый день доставил храбруму Теренцию монету, равную 4096 единичным монетам. Она имела около 34 см в ширину, а вес ее равнялся $20\frac{1}{2}$ кг.

На четырнадцатый день Теренций вынес из казначейства тяжелую монету в 41 кг весом и около 42 см шириною.

— Не устал ли ты, мой храбрый Теренций? — спросил его император, сдерживая улыбку.

— Нет, государь мой, — хмуро ответил полководец, стирая пот со лба.

Наступил пятнадцатый день. Тяжела была на этот раз ноша Теренция. Медленно брел он к императору, неся огромную монету, составленную из 16 384 единичных монет. Она достигала 53 см в ширину и весила 80 кг — вес рослого воина.

На шестнадцатый день полководец шатался под ношей, лежавшей на его спине. Это была монета, равная 32 768 единичным монетам и весившая 164 кг; поперечник ее достигал 67 см.

*) Если монета по объему в 64 раза больше обычной, то она шире и толще всего в 4 раза, потому что $4 \times 4 \times 4 = 64$. Это надо иметь в виду и в дальнейшем при расчете размеров монет, о которых говорится в рассказе.

Полководец был обессилен и тяжело дышал. Император улыбался...

Когда Теренций явился в приемную залу императора на следующий день, он был встречен громким смехом. Он не мог уже нести свою ношу в руках, а катил ее впереди себя. Монета имела в поперечнике 84 см и весила 328 кг. Она соответствовала весу 65 536 единичных монет.

Восемнадцатый день был последним днем обогащения Теренция. В этот день кончились его посещения казначейства и странствования с ношей в залу императора. Ему пришлось доставить на этот раз монету, соответствовавшую 131 072 единичным монетам. Она имела более метра в поперечнике и весила 655 кг. Пользуясь своим копьем как рычагом, Теренций с величайшим напряжением сил едва вкатил ее в залу. С грохотом упала исполинская монета к ногам императора.

Теренций был совершенно измучен.

— Не могу больше... Довольно, — прошептал он.

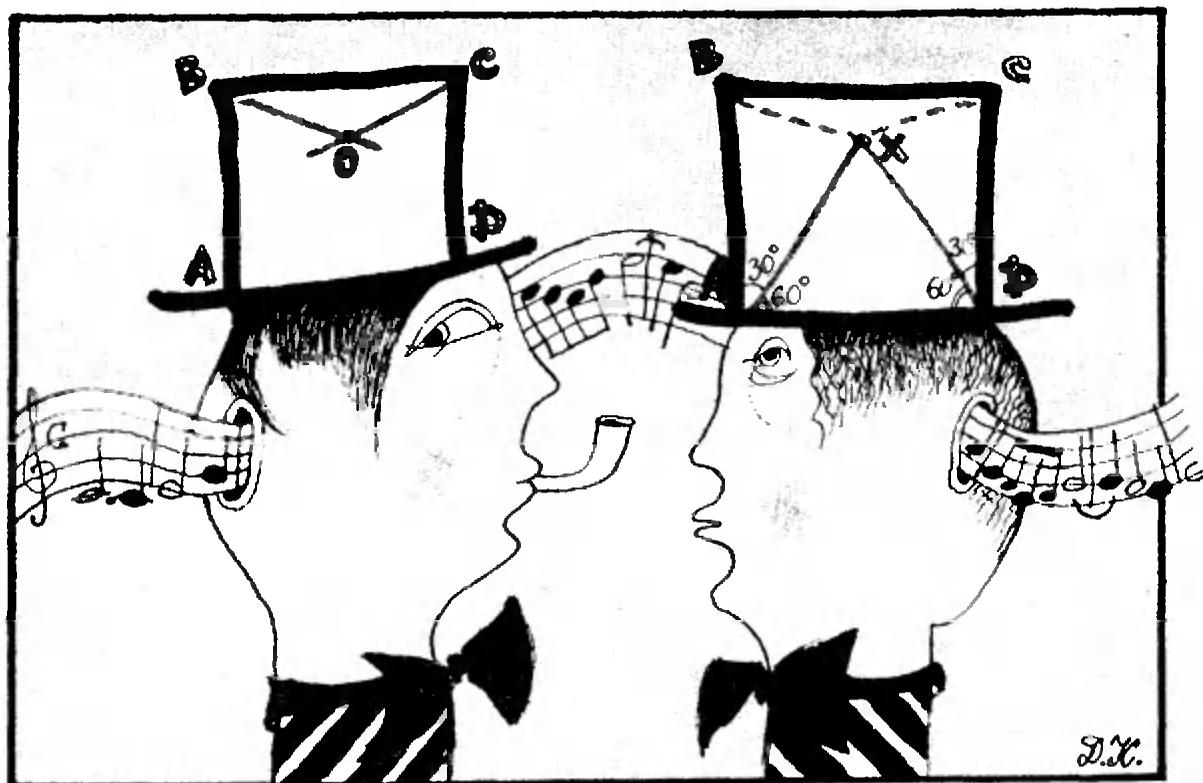
Император с трудом подавил смех удовольствия, видя полный успех своей хитрости. Он приказал казначею исчислить, сколько всего брасов вынес Теренций в приемную залу.

Казначей исполнил поручение и сказал:

— Государь, благодаря твоей щедрости победоносный воитель Теренций получил...

* * *

Здесь мы обрываем рассказ Я. И. Перельмана. Посчитайте самостоятельно, сколько монет получил в награду Теренций.



Математический кружок

Криминальная геометрия, или Дело принципа

(методическое пособие в одном акте)

Д. В. ФОМИН

На сцене темно. Тихо звучит мелодия (см. заставку). Зажигается свет. Гостиная в доме 221-б на Бейкер-стрит. Шерлок Холмс сидит, просматривая вечернюю газету. Входит Ватсон.

Холмс. Здравствуйте, друг мой. Я вижу, вы решили на время забыть о медицине и заняться геометрией.

Ватсон. Но как...?

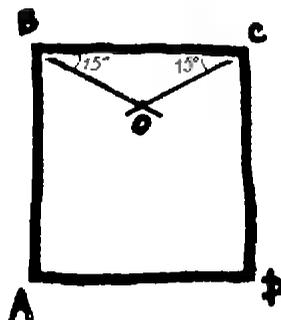
Холмс. У вас из кармана торчит номер вчерашней «Daily Joke» с конкурсом геометрических задач. Сразу видно, что вы потратили немало

чернил, пытаясь одолеть хотя бы одну из задач.

Ватсон. Однако с чего вы взяли, Холмс, что я не решил ни одной задачи? Правда, так оно и есть... (Садится).

Холмс. Не обижайтесь, дорогой Ватсон. Кстати, все эти задачи решаются практически одинаково, если к ним, конечно, правильно подойти. Правда, я не видел еще задач этого конкурса, но... Впрочем, давайте посмотрим.

Задача 1. Точка O находится внутри квадрата $ABCD$, причем углы OCB и OBC имеют величину 15 гра-



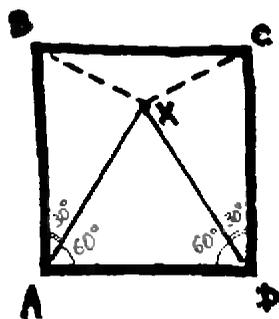
дусов. Докажите, что треугольник OAD — равносторонний.

Ватсон (разводя руками). По загадочности эта задача напоминает мне дело о похищении персидского шаха. Вы помните, Холмс?

Холмс. Да что вы, друг мой! Излагаю вам решение прямо сейчас. Воспользуемся здесь «принципом обратного хода». Надеюсь, что из решения вы поймете, в чем он состоит. Рассмотрим точку X , которая является третьей вершиной равностороннего треугольника, две вершины которого — точки A и D .

Ватсон. Но таких точек две.

Холмс. Конечно, мы возьмем ту, которая лежит внутри квадрата. Найдем углы XBC и XCB . Ну, Ватсон, тут вам как приверженцу точных наук и карты в руки. Сосчитали?



Ватсон. Сейчас, сейчас... Надо воспользоваться тем, что BAX и XCD — равнобедренные треугольники. Ба! Да ведь эти углы равны по 15 градусов! Хм, ну и что же...

Холмс. Да ведь это означает, что точки O и X совпадают. Это же элементарно, друг мой.

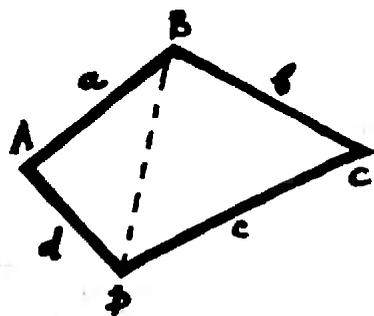
Ватсон. Потрясающе! Но... во второй задаче этот ваш принцип не поможет.

Холмс. Ну так мы применим другой. Итак

Задача 2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон (в порядке их следования по часовой стрелке) равны a, b, c, d . Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ не превосходит

$$\frac{1}{4}(a+b)(c+d).$$

Да, эта задача совсем другого типа...



Неравенство. Мне, Ватсон, сразу вспоминается шифр профессора Мориарти.

Ватсон (мечтательно). Да, это была хитрая штука. Все-таки он, надо отдать ему должное, был великолепным математиком... Но вы отвлеклись, Холмс.

Холмс. Это вы замечтались, Ватсон. А я за это время решил вашу задачу. Послушайте. Сначала раскроем скобки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(a+b)(c+d) &= \frac{1}{4}(ad+bc) + \\ &+ \frac{1}{4}(ac+bd). \end{aligned}$$

Я сразу подумал о том, нельзя ли упростить это выражение, а вместе с ним и подход к решению задачи. Запомните, Ватсон, «принцип упрощения»: сначала нужно перебрать самые простые и естественные пути решения задачи.

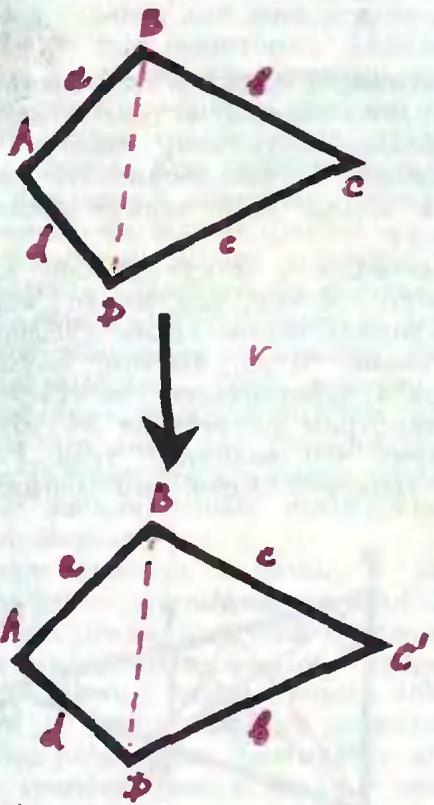
Ватсон. Но доказывать, что сумма $ad+bc$ не меньше удвоенной площади четырехугольника, я и сам умею: ad не меньше удвоенной площади треугольника ABD , а bc не меньше удвоенной площади треугольника BCD — вот и все. А что делать с выражением $ac+bd$?

Холмс. Тут нам поможет «принцип аналогии». Надо только последовательно и логично мыслить, друг мой — это необходимо в математике, как и в криминалистике. За счет чего вам удалась предыдущая оценка? Вам помогло то, что стороны a, d и b, c находятся рядом, не так ли? Значит, надо сделать так, чтобы рядом оказались a и c .

Ватсон. А b и d ?

Холмс. Ну подумайте сами, Ватсон, если a и c будут рядом, то b и d , конеч-

но же, также окажутся рядом. Так что всегда нужно проверять, не являются ли какие-то условия лишними. Но это к слову. Итак, что же нужно сделать с нашим четырехугольником, чтобы площадь у него не изменилась, а стороны a и c оказались рядом?... Что же вы, друг мой... А с вами ли ваш скальпель?



Ватсон (не понимая). Нет, не сомной. Зачем он вам... (Смотрит на чертеж и внезапно понимает.) Гениально! В самом деле, надо просто разрезать $ABCD$ по диагонали BD и... и перевернуть одну из частей. Тогда, конечно, рассуждая так же, как и раньше, получаем, что $ac + bd$ не меньше удвоенной площади четырехугольника. Складываем это с первым неравенством и получаем то, что и требовалось. Замечательно!

Холмс. Заметьте, что тут мы еще использовали «динамический принцип», изменив по ходу решения задачи ее данные. Это вообще замечательный принцип. Он гласит: изменяйте все, что вам угодно, в задаче — формулировку, данные задачи, то, что вам нужно доказать — лишь

бы решение новой задачи давало решение старой. Он, в частности, говорит: не воспринимайте данные задачи как нечто застывшее. Ну, например, если вам нужно поймать преступника, то не забывайте, что он — живой человек и может свободно передвигаться по театру ваших боевых действий.

Ватсон. Что-то я не улавливаю...

Холмс. А вот давайте, Ватсон, посмотрим на третью задачу конкурса.

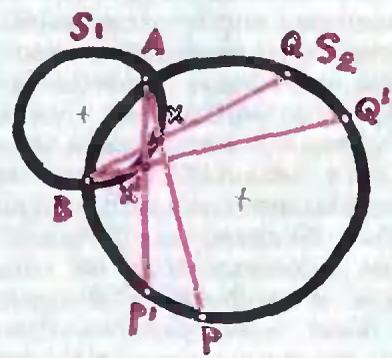
Ватсон. Только я вас умоляю, Холмс, рассказывайте сразу ход ваших мыслей, а не просто решение. Я уже стал удивляться. (Встает с кресла и подходит к Холмсу.)

Холмс. Я постараюсь, друг мой. Итак

Задача 3. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются под прямым углом в точках A и B . Точка X лежит на первой окружности, но внутри второй. Лучи AX и BX пересекают окружность S_2 в точках P и Q . Докажите, что отрезок PQ является диаметром окружности S_2 .

Ватсон. Условие этой задачи я просто не понял. Что это значит — окружности пересекаются под прямым углом? Бред!

Холмс. Да нет же, Ватсон, это просто означает, что касательные к ним в точках пересечения перпендикулярны. Так вот, смотрите, как работает здесь «принцип динамики». Давайте подвинем точку X по дуге AB окружности S_1 — она станет точкой X' , а лучи AX' и BX' будут пересекать окружность S_2 в точках P' и Q' — посмотрите, я изображу это на листке бумаги.



Очевидно, что углы $X'AX$ и $X'BX$ равны. Но значит, равны угловые величины дуг PP' и QQ' . А это означает, что угловая величина дуги $P'Q'$ равна угловой величине дуги PQ .

Ватсон (перебивает Холмса). Но как вам пришло в голову доказывать именно это, Холмс?

Холмс. Но подумайте сами, друг мой, если при любом положении точки X на дуге AB отрезок PQ — диаметр, то как бы мы ни сдвинули точку X , угловая величина дуги PQ не должна измениться. Если верно то, что требуется доказать в задаче, то, очевидно, должно быть верно и это. Опять «принцип обратного хода».

А теперь, Ватсон, давайте так двигать нашу точку X до самой точки B . Что мы получим? Угловая величина дуги PQ в этом случае как раз будет равна 180 градусам.

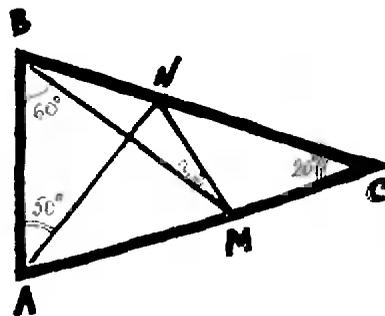
Ватсон. Это почему же? Ах, да... мы пользуемся тем, что эти окружности пересекаются под прямым углом. Вот, кстати, Холмс, еще один принцип: надо использовать все данные задачи и все время помнить о том, что они должны быть как-то использованы! Как бы его назвать?

Холмс (невозмутимо). Я называю его «принципом полноты решения».

Ватсон. Ну знаете! Можно подумать, что у вас в каждом кармане по принципу!

Холмс. Нет, дорогой друг, они у меня все в голове. Должен вам, впрочем, заметить, что этот принцип, который вам только что пришел в голову, иногда неприменим в реальной жизни. Некоторые факты, с первого взгляда подозрительные или прямо указывающие на преступника, затем оказываются чистой случайностью или отвлекающими маневрами настоящего виновника. Вспомните хотя бы дело о берилловой деадеме... Ну и, наконец, последняя задача.

Задача 4. ABC — равнобедренный треугольник с углом при вершине C , равным 20 градусам. Точки M и N взяты на сторонах AC и BC так, что величина угла NAB — 50 градусов, а угла MCA — 60 градусов. Докажите, что величина угла NMB равна 30 градусов.

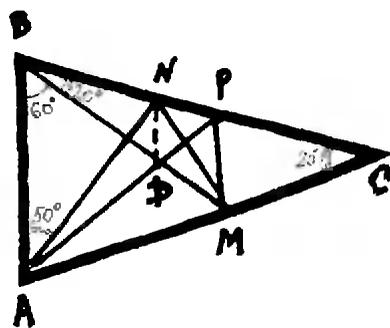


Ватсон. Я пытался было вычислить этот угол с помощью тригонометрии...

Холмс. Друг мой, берегите свое здоровье! Лучше почитайте газеты, а я уделю этой задаче несколько минут.

Пять-шесть минут Ватсон читает газету, Холмс задумчиво изучает рисунок. Слышна тихая музыка.

Холмс. Итак, Ватсон, слушайте. Задача, действительно, не из простых. Рассмотрим на стороне BC точку P такую, что величина угла PAB — 60 градусов. Ясно, что прямая PM



параллельна прямой AB и что треугольник PDM (а D , Ватсон, это точка пересечения отрезков PA и BM) — равнобедренный. Так как треугольник BNA равнобедренный, то длины отрезков BN , BA и BD равны и углы BND и BDN равны по 80 градусов. Отсюда мы легко получаем, что угол NDP равен 40 градусам. Но и угол NPD также равен 40 градусам. Значит, треугольник NDP — равнобедренный, и, следовательно, MN — биссектриса угла BMP . Следовательно, величина угла NMB равна половине величины угла DMP и равна 30 градусам. Вот и все.

Ватсон (потрясенно). Но как?! Как вы ухитрились придумать это решение?

Холмс. Ну что же, милый Ватсон, я, пожалуй, мог бы вам рассказать захватывающую историю о том, как я, при помощи десятка умело подобранных принципов, придумал решение... Не смейтесь, Ватсон, некоторые принципы мне, конечно, пригодились. Например, замечательный «принцип цели» — надо все время помнить, что осталось сделать для достижения цели. Ну и еще некоторые мелочи... Однако, друг мой, для решения задачи требуется все-таки и еще кое-что, кроме набора стандартных правил размышления. Еще нужны и такие вещи, как опыт и интуиция. Неужели вы думаете, что все так просто — надо только выучить много «принципов» и научиться применять их в какой-то последовательности? К счастью, человеческое мышление есть нечто неизмеримо большее... хотя, конечно, и эти принципы, которые по сути своей есть не что иное, как штампы мысли, могут принести реальную пользу. Ничем рациональным пренебрегать нельзя, Ватсон!

Ватсон (устало садится в свое кресло, берет в руки газету). Ого! Послушайте, Холмс: «Вчера ночью неизвестные злоумышленники, забравшись в контору газеты «Daily Joke» украли из сейфа главного редактора приз традиционного ежегодного конкурса геометрических задач — золотой лист Мебиуса в натуральную величину стоимостью...», ну и так далее, тут неинтересно... А, вот! «...Инспектор Робинсон заявил, что полиция еще не нашла на след преступников. Редактор газеты сообщил журналистам, что с целью добиться увеличения числа подписчиков газеты и поправить свои финансовые дела газета в одном из ближайших номеров объявит новый, внеочередной конкурс решения задач...»

Дорогой друг, после того, что я сегодня услышал, поймать этих негодяев для вас — дело принципа!

С последними словами свет на сцене постепенно гаснет и в наступившей темноте раздаются заключительные аккорды сопровождающей спектакль мелодии.

* * *

Задачи упомянутого внеочередного конкурса приводятся ниже. Помните, что в каждой из них есть своя небольшая изюминка, которую вы легче сможете отыскать, пользуясь многочисленными принципами великого детектива.

Задача 5. Докажите, что пятиконечную звезду нельзя нарисовать так, чтобы длины отрезков $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, JA$ (см. рис.) были бы равны соответственно 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.



Задача 6. Точка B лежит внутри прямого угла с вершиной O , а точки A и C — на двух его сторонах. Докажите, что периметр треугольника ABC не меньше удвоенной длины отрезка OB .

Задача 7. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный, причем длина отрезка AD равна сумме длин отрезков AB и CD . Докажите, что биссектрисы углов B и C пересекаются на стороне AD .

Задача 8. Безрукий вор хочет столкнуть носом какую-нибудь монету со стола у менялы, не задев его остальных монет (чтобы не звякнуть). Удастся ли это ему? Монеты круглые, размеры их, возможно, различны и лежат они не соприкасаясь.

Задача 9. Квадрат разрезан на несколько прямоугольников. Для каждого из них вычислим отношение меньшей стороны к большей. Докажите, что сумма этих чисел не меньше единицы.



Лаборатория „Кванта“

Десять опытов из «золотого фонда» гидродинамики

Кандидат физико-математических наук
С. К. БЕТЯЕВ

*Кушай, кума, десятую шанежку.
Я ведь не считаю.*

Русская пословица.

Невозможно подсчитать, каких достижений в гидродинамике больше: теоретических или опытных. Даже разделить их на эти две категории затруднительно.

Конечно, это относится и к любой другой области физики. Теории часто предшествует эксперимент, наводя-

щий на обнаружение нового явления. Так, французский астроном Леверье открывший в 1846 году планету Нептун «на кончике пера», воспользовался данными измерений возмущений в движении планеты Уран. И наоборот, экспериментальному открытию могут оказать существенную услугу предварительные теоретические разработки. Например, обнаружение совсем недавно опытным путем явления сверхпроводимости при «почти комнатной» температуре стало возможным только благодаря теоретическому анализу этого эффекта.

Различают несколько видов научного эксперимента. Если о природе изучаемого явления еще нет никаких гипотез или версий, то говорят о поисковом эксперименте. Если имеется одна гипотеза, то эксперимент, проводимый с целью ее проверки, называют контрольным. Наконец, если существует несколько гипотез, то эксперимент, проводимый с целью отбора одной из них, называют решающим.

Кроме разделения экспериментов по их целевому назначению, используется также формальное разделение на количественный и качественный эксперименты. В гидродинамике в результате проведения первого добываются цифровые данные, а в результате второго определяется «геометрия» течения — например траектория движения частиц жидкости. Количественный эксперимент обычно является «черным ящиком»: регистрируется лишь эхо-сигнал некоторого воздействия на исследуемый объект, природа которого остается неизвестной. Большое значение для гидродинамики как науки имеет качественный эксперимент.

Все обсуждаемые ниже опыты — качественные. Большинство из них можно провести в школьном физическом кабинете или дома.

1. Фокус с шариком для пинг-понга

Мы привыкли к тому, что на погруженное в поток жидкости тело действует сила сопротивления, направленная по потоку. Но всегда ли происходит именно так?

Приспособьте к выходному отверстию пылесоса воронку (желательно — стеклянную) и поместите в нее шарик для пинг-понга. При включении пылесоса шарик, будучи абсолютно свободным, не вылетит наружу. Он останется в воронке даже в том случае, если воронку повернуть широким концом к земле. Вместо силы сопротивления появляется сила тяги, уравнивающая силу тяжести шарика!

Попробуем разобраться в этом. Посмотрите на рисунок 1. Между шариком и стенками воронки в сечении AA' создается самое узкое отверстие. Через него за единицу времени должно пройти такое же количество воздуха, как и через любое другое поперечное сечение струи, поэтому в узком месте частицы воздуха «спешат», их скорость увеличивается. В сечении AA' скорость потока максимальна. Но между скоростью потока и давлением существует определенная зависимость, выражающаяся законом Бернулли: если трения нет, то с увеличением скорости течения давление уменьшается. Значит, давление на шарик в передней, лобовой части меньше, чем давление на его задней, кормовой части. Именно эта разность давлений и обуславливает силу F , удерживающую шарик в покое.

Удовлетворило ли вас такое объяснение? Если нет, то будь я ректором Московского физико-технического института, сразу дал бы вам рекомендацию для поступления на факультет аэродинамики и летательной техники. И вот почему. Положение шарика

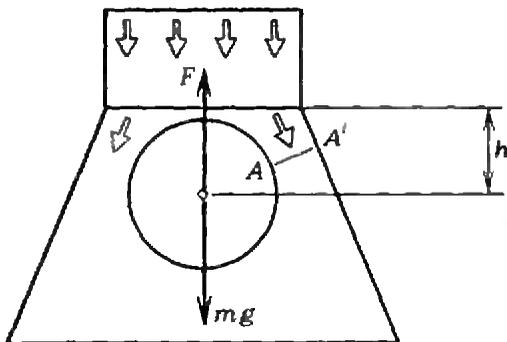


Рис. 1.

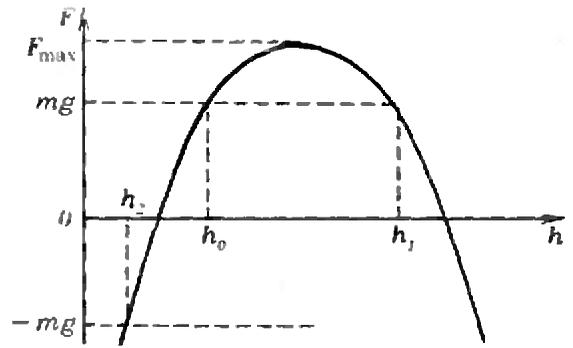


Рис. 2.

ка в нашем опыте устойчивое: при малых изменениях расстояния h — от начала расширения воронки до центра шарика — шарик будет возвращаться в равновесное положение $h=h_0$, где аэродинамическая сила F уравнивает силу тяжести шарика mg . Природа с завидным постоянством выбирает устойчивое равновесие. В противном случае даже малые возмущения, которые всегда имеются в потоке, нарушат равновесие. Положение шарика будет устойчивым, если с увеличением h сила F увеличивается, заставляя шарик подниматься вверх, в исходное положение, а с уменьшением h сила F уменьшается, позволяя шарика опускаться до равновесного положения. Завяжем «узелок для памяти»: вблизи точки $h=h_0$ сила F возрастает с увеличением h .

Если подвести шарик вплотную к сечению, где начинается расширение воронки, то под напором всей струи воздуха сила F , изменив знак, становится обычной силой сопротивления. Сила F отрицательна также и далеко внизу от положения равновесия. Примерный вид зависимости F от h изображен на рисунке 2. Вблизи малых и больших значений h функция F отрицательна, около $h=h_0$ функция возрастает с ростом h (теперь «узелок» можно развязать!). Обратите внимание — на графике есть не одно, а два положения равновесия: h_0 и h_1 . Как нетрудно видеть, второе положение $h=h_1$ — неустойчивое. Из графика следует также существование максимальной силы тяги F_{max} . Если взять более тяжелый шарик, но такой, что

его сила тяжести $m_1 g < F_{\max}$, то он, сместившись несколько вниз, тоже останется в положении равновесия. В случае $m_1 g > F_{\max}$ шарик выпадет из воронки.

Если расширенный конец воронки поднять вверх, то направление силы F относительно направления скорости струи изменится на противоположное — она станет обычной силой сопротивления, действующей по потоку. При этом равновесное положение шарика h_2 окажется более близким к наиболее узкому сечению воронки, но тоже будет устойчивым.*)

2. Пограничный слой

Кто когда-нибудь имел дело с компьютером, безусловно, знает, что ЭВМ умеет строить графики. Но оказывается, что можно получить график некоторой функции без каких-либо измерений, а сразу во время проведения опыта.

Интересный пример на эту тему продемонстрировал в 1977 году американский ученый Ф. Уортман. На рисунке 3 воспроизведена фотография течения жидкости в так называемом пограничном слое. Внизу вы видите пластину, которая обтекалась водой, движущейся слева направо со скоростью 9 см/с. Тонкая теллуровая проволока в левой части снимка, протянутая перпендикулярно пластине, нагревалась кратковременным импульсом электрического тока продолжительностью в несколько миллисекунд. Химическая реакция с водой породила тонкое облако коллоидных частиц, которое потом дрейфовало вместе с потоком воды. На фотографии зафиксировано положение коллоидных частиц в некоторый момент времени t , когда каждая из них прошла параллельно пластине путь $u(y)t$. Здесь $u(y)$ — скорость частицы в зависимости от перпендикулярной к пластине координаты y .

*) О многочисленных опытах с шариком для пинг-понга вы можете прочитать в статье А. В. Бялко «Пинг-понг... в умывальнике» («Квант», 1985, № 3).

Как видно из полученного «графика», непосредственно на пластине скорость жидкости равна нулю, а при достаточном удалении от пластины скорость стремится к постоянному значению, равному 9 см/с. Все описанные события происходят в тонком слое толщиной всего лишь 5 мм. Такой пристеночный слой, образующийся в не очень вязкой жидкости, и называется пограничным слоем. Полученный с помощью опыта так называемый профиль скорости жидкости в пограничном слое удивительным образом совпадает с расчетным. В гидродинамике подобные совпадения очень редки.

3. Опыты Рейнольдса

Упорядоченное слоистое течение жидкости, называемое ламинарным (от латинского *lamina* — полоска), пример которого показан на рисунке 3, с увеличением скорости становится неустойчивым и переходит в хаотиче-

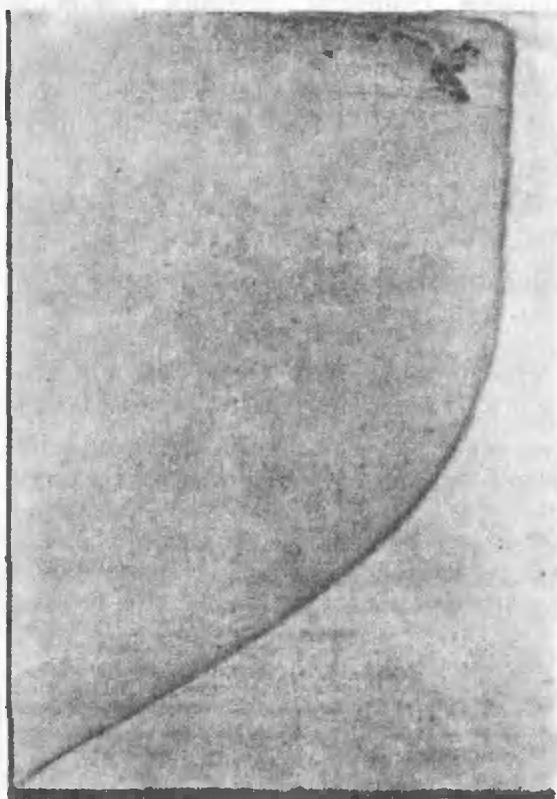


Рис. 3.

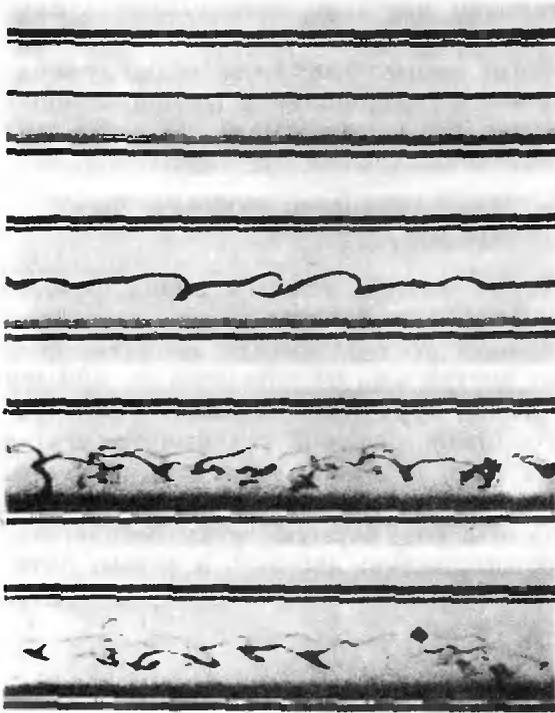


Рис. 4.

ское турбулентное течение (от латинского *turbulentus* — беспорядочный). Такое замечательное открытие сделал в 1893 году известный английский физик О. Рейнольдс (1842—1912). Его опыты документировались не фотографиями, а рисунками. Однако в Манчестерском университете сохранилась сама экспериментальная установка, и на ней в наше время, т. е. почти сто лет спустя, был повторен классический опыт Рейнольдса и получены фотографии течения жидкости. Они приведены на рисунке 4.

На самом верхнем снимке видно, что струйка подкрашенной воды, вводимая в стеклянную трубку, движется прямолинейно — течение ламинарное. На следующем снимке виден переход ламинарного течения в турбулентное — при возросшей скорости. На двух остальных снимках — явно выраженное турбулентное течение.

Любопытен следующий факт. В современном Манчестере уличное движение гораздо интенсивнее, чем в прошлом веке. Так вот, этот уличный шум оказал влияние на критическую скорость, при которой происходит переход течения из ламинарного в тур-

булентное, — она оказалась ниже значения, полученного Рейнольдсом. Малое возмущение — уличный шум — привело к весьма значительным последствиям.

4. Когда малые причины приводят к большим последствиям

Примеров систем, находящихся в таком состоянии, когда небольшие отклонения приводят к существенным изменениям, много. Это и вода (или лед) при 0°C , и уран в количестве, равном его критической массе, и ракета, стартующая с первой космической скоростью, и т. п.

В гидродинамике есть два явления, особенно чувствительных к малым возмущениям: отрыв потока от тела и переход ламинарного течения в турбулентное.

Известно, что ламинарный пограничный слой более предрасположен к отрыву, чем турбулентный. Он быстрее отрывается от тела, создавая ши-

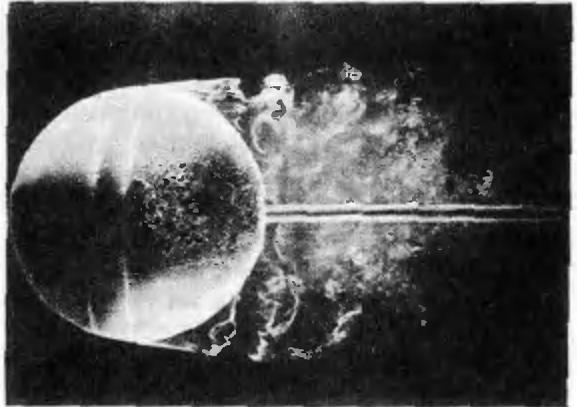


Рис. 5.

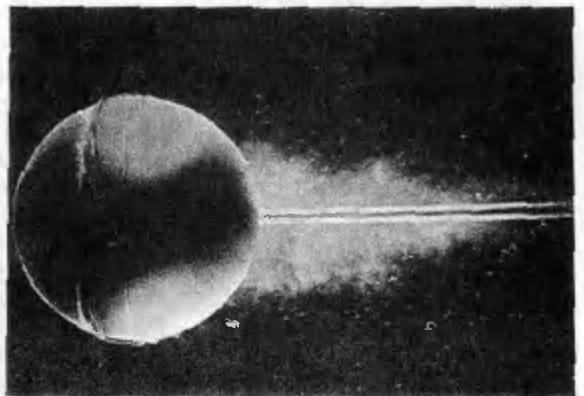


Рис. 6.

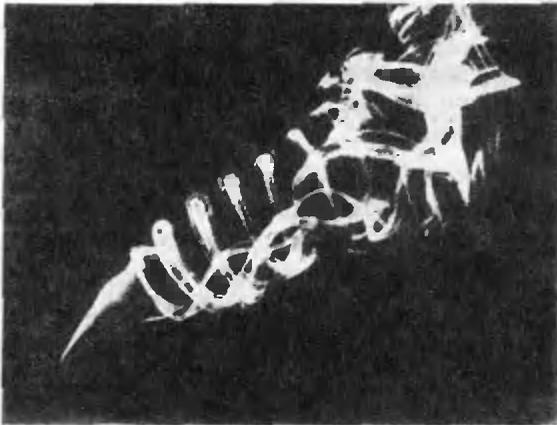


Рис. 7.

рокий след и большое сопротивление движению тела. На фотографии на рисунке 5 вы видите картину обтекания шара в воде. Визуализация течения достигалась с помощью воздушных пузырьков. Пограничный слой — ламинарный, его отрыв происходит перед экватором шара. Если же пограничный слой сделать турбулентным, обтекание шара будет принципиально другим. Для этих целей достаточно малого по величине или локализованного в малой области воздействия.

Известный немецкий гидродинамик Л. Прандтль (1875—1953) предложил для турбулизации течения самое простое решение — надеть на шар перед его экватором тонкий проволочный обруч. Фотография обтекания такого шара представлена на рисунке 6. Пограничный слой вблизи обруча становится турбулентным и отрывается

гораздо ниже по потоку, чем в случае ламинарного течения. Сопротивление шара при этом резко уменьшается (уменьшается площадь поперечного сечения следа).

5. Неустойчивость струйки дыма от сигареты

Турбулентные течения очень фотогеничны, они завораживают взор, как ночной костер. Кстати сказать, дым от костра или от сигареты — пример именно турбулентного движения. Фотоснимок дымовой струйки от сигареты (рис. 7) показывает, как ламинарный столб дыма превращается сначала в регулярную сетку петель, напоминающую лесенку, а затем, потеряв устойчивость, становится турбулентным.

6. Турбулентная струя воды

Еще один пример развития турбулентности — обычная струя воды, льющаяся из водопроводного крана в покоящуюся воду. Фотоснимок, приведенный на заставке к статье сделан с помощью свечения — флуоресценции, вызванной лазером. Хорошо видно, как первоначальная симметрия струи быстро разрушается.

* * *

Продолжение этой статьи будет опубликовано в одном из следующих номеров журнала.

Что может «Электрон»?

Кооператив «Электрон» может многое...

Кооператив предлагает владельцам ЦЭВМ (ДВК, БК—0010, РК—86, «Микроша», «Специалист», «Спектрум», «Агат», УК—НЦ, IBM PC) широкий выбор системных, при-

кладных, игровых и учебных программ.

Заклучает договоры с авторами на тиражирование разработанного ими программного обеспечения.

Оказывает информационное содействие предприятиям, организациям, учебным заведениям и отдельным лицам в реализации и приобретении ЭВМ всех типов.

Комплектует учебные и игровые компьютерные классы.

Кооператив «Электрон» принимает запросы на каталоги и условия договоров по адресу: 103489 Москва, корп. 705, кооператив «Электрон».

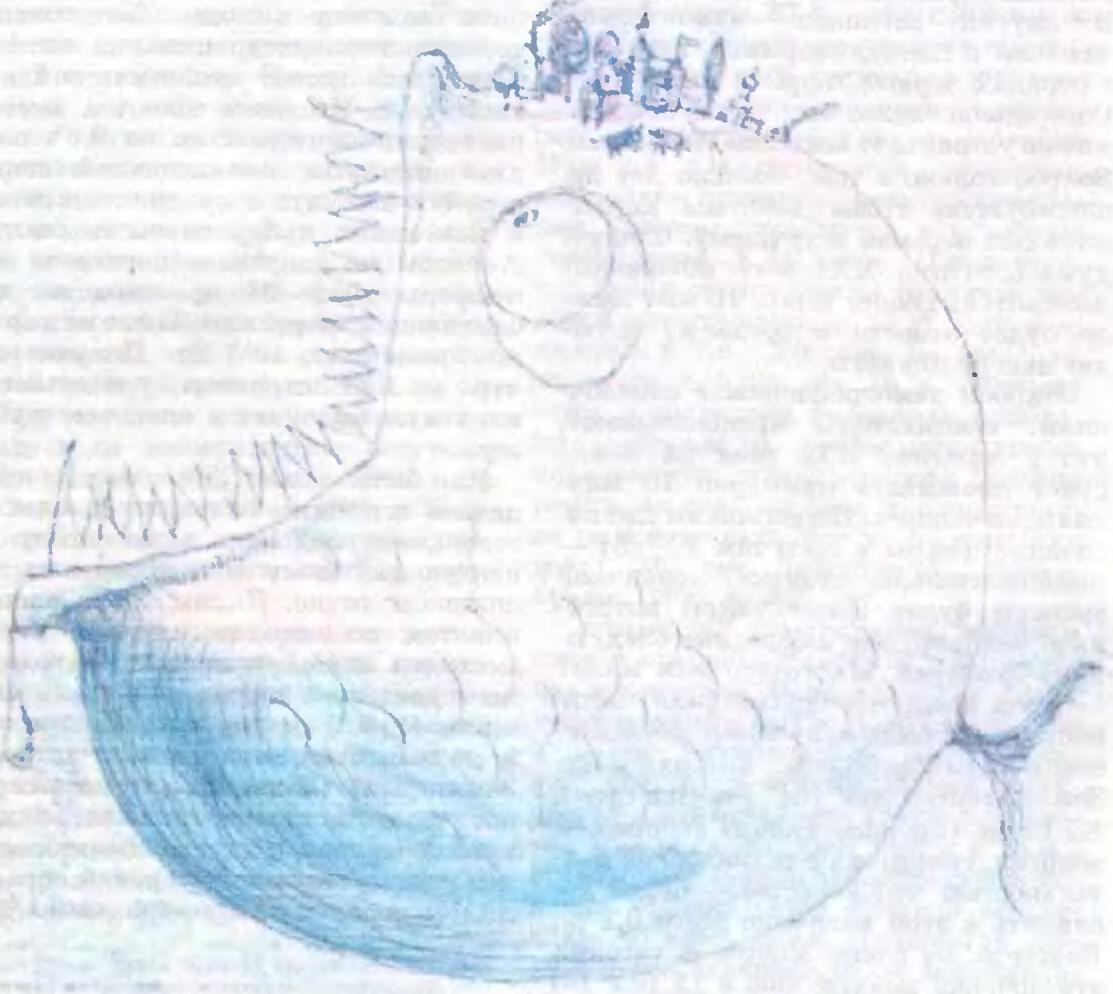
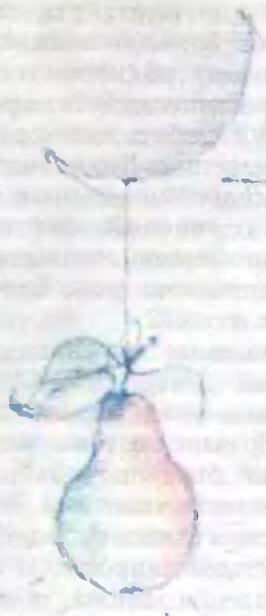
Телефон для справок: 536-12-81 (вторник, четверг, суббота с 12 до 20 часов).

Р-знает ракета

XXI век: энергия из космоса?

*Академик В. С. АВДУЕВСКИЙ,
доктор физико-математических наук
Л. В. ЛЕСКОВ*

Зима 1989 года побила все рекорды: в Советском Союзе было необычайно тепло, в США и Канаде необычайно холодно... Где-то стоит небывалая за-



суха, где-то идут проливные дожди... Специалисты из Гидрометцентра предупреждают нас в программе «Время»: похоже, меняется климат — называется «парниковый эффект», земная промышленность выделяет в атмосферу слишком много углекислого газа. В газетах пишут об экологическом кризисе, который то ли уже наступил, то ли вот-вот наступит...

Так, может, и правда не в меру расточительное человечество превратилось в угрозу нашей не столь уж большой планете, и его промышленная деятельность в состоянии нарушить климатическое равновесие, установившееся на ней миллионы лет назад?

Обратимся к цифрам. В развитых странах сегодня потребление первичной энергии таково, что на душу населения приходится около 10 кВт. В других регионах — значительно меньше: в Китае, например, в 10 раз, в странах черной Африки даже в 50. Совершенно ясно, что такое положение не устраивает жителей этих стран. Вопрос только в том, сколько лет им потребуется, чтобы добиться кардинальных перемен к лучшему. Следует думать, что в XXI веке положение изменится: скорее всего, 10 кВт можно будет отнести к среднему жителю нашей планеты.

Откроем демографические справочники: специалисты предсказывают, что в середине XXI века на Земле будет проживать примерно 10 миллиардов человек. Перемножим две последние цифры и получим 10^{14} Вт — приблизительно столько первичной энергии будет каждую секунду потреблять человечество в середине следующего столетия. Много это или мало?

Опять раскроем справочники: мощность солнечного излучения, поглощаемого атмосферой и поверхностью Земли, составляет 10^{17} Вт. Значит, в XXI веке «антропогенная» энергия — энергия, связанная с технической деятельностью человечества, — будет добавлять к этой величине всего 0,1%. Кажется, не очень много. А сегодня эта добавка меньше еще в 12 раз. Но означает ли это, что, посмотрев на циф-

ры, можно вздохнуть спокойно и не слушать больше паникеров, которые понапрасну поднимают тревогу?

Энергетический баланс земной биосферы отработан в ходе миллионов лет эволюции. Значительное увеличение выработки энергии без использования солнечной энергии, поступающей на Землю, чревато серьезными последствиями для биосферы и для жизни людей.

Несколько лет назад в Вычислительном центре АН СССР под руководством академика Н. Н. Моисеева разработана система математических моделей биогеоценоза*). Она получила название «система Гея». Эта система математических моделей позволяет рассчитывать процессы в атмосфере и в океане, а также поведение биоты (всей живой природы на Земле).

Результаты расчетов позволили сделать важные выводы. Увеличение средних температур планеты на 4—5 градусов грозит экологической катастрофой. Но даже если эта температура изменится всего на $0,5^\circ$, следует ожидать значительной перестройки климата в средних широтах и изменения продуктивности биоты. А чтобы не допускать перегрева атмосферы на 2—3°, производство добавляющей энергии на Земле не должно превышать 10^{14} Вт. Получается, что в XXI столетии человечество вплотную подойдет к опасному рубежу...

Но, быть может, не следует придавать излишне большого значения этим расчетам? Ведь даже погоду на следующий день предсказывают не слишком точно. Дадим слово специалистам по истории климата и атмосферы нашей планеты. Благодаря исследованиям академика А. Л. Яншина, М. И. Будыко, Н. А. Ясаманова и других стало ясно, что в истории Земли были эпохи, которые современное человечество восприняло бы как крайне неблагоприятные. Возникновение соответствующих условий определялось небольшими — порядка 0,1% —

*) Биогеоценоз — взаимосвязанные и взаимодействующие комплексы живой и неживой природы.

колебаниями энергии солнечного излучения, поглощаемой Землей. Но 0,1 % — это как раз 10^{14} Вт, т. е. снова та же самая критическая величина!

Но это еще далеко не все. В общем загрязнении атмосферы на долю энергетики приходится 60 %. Скорость снижения биомассы за счет хозяйственной деятельности человека такова, что ежегодное уменьшение биоты составляет 2 миллиарда тонн. Площадь лесов на планете ежегодно сокращается на 1 %. Нарастает антропогенное загрязнение мирового океана (вредные отходы, пленки нефти и масел и т. д.). Выброс в атмосферу больших количеств дыма, пыли, сульфат-аэрозолей, выхлопных газов авиа- и автотранспорта ведет к увеличению глобального альбедо*) Земли и к истощению защитного озонового слоя атмосферы. Результатом всех этих процессов может оказаться снижение концентрации кислорода в атмосфере Земли. Не ожидает ли наших потомков парадоксальная ситуация, когда им придется создавать специальные растительные фермы для пополнения в атмосфере кислородных запасов?

Но и это еще не все. Повышение качества жизни людей требует роста материального производства, а это, в свою очередь, требует роста энергопотребления. Однако удельный вес полезного продукта по отношению к используемым минеральным ресурсам не превышает 10 %, более 90 % идет в отходы. В результате с ростом энергопотребления непропорционально быстро возрастает загрязнение окружающей среды.

Итак, цифры подтверждают: основания для тревоги есть. Где же искать выход? Об этом сейчас тоже много пишут: надо переводить промышленное производство на энерго- и ресурсосберегающие процессы, шире использовать безотходные технологии, самым строгим и неукоснительным образом выполнять комплекс природоохранных мероприятий.

*) Альбедо характеризует способность поверхности отражать поток электромагнитного излучения; определяется как отношение отраженного потока к падающему.

В энергетике существует такой показатель — эластичность спроса на энергию по валовому национальному продукту (ВНП). Он отражает связь между ростом ВНП и увеличением производства энергии. В течение многих лет в промышленно развитых странах этот показатель был близок к единице, иными словами, чтобы увеличить ВНП на 1 %, требовалось поднять производство энергии также на 1 %. В 80-е годы за счет внедрения энергосберегающих технологий коэффициент эластичности удалось снизить примерно вдвое. Вряд ли, однако, можно рассчитывать на дальнейшие значительные успехи в этом направлении: стоимость первичных источников энергии не снижается, а, скорее, растет.

Тут перед нами встает еще одна проблема, причем сложнейшая. В настоящее время 87 % всех первичных потребляемых энергоресурсов обеспечивается за счет сжигания органических источников энергии — нефти, газа, угля, дров. Согласно прогнозу Мировой энергетической конференции, такая структура энергопотребления в целом сохранится и в первые десятилетия XXI века. Ожидается, что вклад органических топлив в мировой энергобаланс к 2020 году увеличится в 1,6—2,0 раза, но его доля снизится с 87 % до 70 %. Именно здесь и возникает указанная проблема: учитывая масштабы разведанных извлекаемых энергоресурсов, добычу нефти на современном уровне удастся поддерживать еще на протяжении всего 30 лет, природного газа — 50 лет, угля — 240 лет.

Оптимисты утверждают: выходом явится ядерная, а затем и термоядерная энергетика. Основания для таких утверждений у них есть, в особенности в части термоядерной энергетике: она потребует минимального количества энергоресурсов (тяжелый изотоп водорода, содержащийся в водах Мирового океана) и относительно безопасна. Что касается ядерной энергетике, то здесь после Чернобыля следовало бы, наверное, более внимательно прислушиваться скорее к голосам скептиков, чем энтузиастов.

Однако и с «термоядерным Эльдрадо» все пока не так просто. Исследования по программе управляемого термоядерного синтеза ведутся уже около 35 лет, но все еще далеки от реальной отдачи. Стоимость экспериментальных термоядерных установок современного поколения превышает 300 миллионов долларов, а на следующем этапе возрастет еще на порядок. По оценкам американских специалистов, производство энергии первым коммерческим термоядерным реактором начнется не ранее 2020 года. При этом, несмотря на длительный срок исследований, до сих пор отсутствуют убедительные доказательства экономической конкурентоспособности термоядерных электростанций будущего.

Так где же все-таки искать выход из этого клубка сложных энергетических и экологических проблем? Есть одно перспективное направление, о котором почему-то незаслуженно мало говорят. Это направление — космические энергосистемы. О них еще в начале нашего века мечтал основоположник космонавтики К. Э. Циолковский, который писал, что люди сумеют освоить «солнечную энергию, в два миллиарда раз большую, чем та, которую человечество имеет на Земле». В его работах развернут детальный сценарий промышленного освоения человечеством космического пространства, включая сооружение орбитальных энергосистем различного типа и назначения.

Для передачи на поверхность Земли концентрированных потоков энергии можно использовать расположенные на околоземных орбитах отражатели солнечного излучения. Впервые на эту возможность обратил внимание в своей рукописной работе (1918—1919 г.) Ю. В. Кондратюк, один из пионеров ракетной техники в СССР.

В 1943 году известный советский электротехник профессор Г. И. Бабат предложил и обосновал способ передачи энергии на борт летательного аппарата с помощью хорошо сфокусированного пучка СВЧ-излучения.

В 1960 году был сделан еще один шаг: инженер Н. А. Варваров выступил с проектом использования орбитальной гелиоэлектростанции для энергоснабжения Земли. А в 1968 году американский инженер П. Глазер, работая независимо, объединил идеи Бабата и Варварова — он выдвинул проект сооружения на геостационарной околоземной орбите солнечной электростанции для снабжения Земли электроэнергией.

С тех пор этому проекту было посвящено немало исследований. Приняли в этом участие и авторы настоящей статьи, выступив с несколькими конкретными предложениями. В частности, было показано, что с помощью таких станций можно выводить грузы в космос. В чем же особенности и преимущества проекта космических солнечных электростанций (КСЭ)?

Если говорить совсем коротко, предлагается следующее. На геостационарной орбите высотой 36 000 км размещается спутник массой $5 \cdot 10^4$ т. Панели установленных на спутнике солнечных батарей площадью 100 км^2 преобразуют энергию солнечного излучения в электрический ток, который, в свою очередь, преобразуется в СВЧ-излучение. Хорошо сфокусированный передающей антенной пучок этого излучения направляется на Землю, улавливается там приемной антенной, диаметр которой составляет около 20 км, а затем еще раз преобразуется в электрический ток для передачи потребителям. Параметры пучка СВЧ-излучения — частота 2,45 ГГц, плотность потока энергии 10 мВт/см^2 — выбираются, исходя из требований безопасности и минимального поглощения в атмосфере. Таковы особенности проекта в самом общем виде. Разумеется, есть и многочисленные варианты, но не будем останавливаться здесь на частных вопросах.

Теперь о преимуществах. Их по крайней мере четыре: экологическая чистота, безопасность, обеспечение экономии минеральных ресурсов, автономность (включая отсутствие необходимости в протяженных линиях электропередачи — приемные антен-

ны можно располагать не очень далеко от потребителя). Пятое преимущество связано с экономией минеральных ресурсов: КПД преобразования СВЧ-энергии на Земле очень высок — около 90 %, следовательно, доля расходуемой антропогенной энергии при том же уровне энергопотребления будет заметно снижена. А это очень важно — «антропогенное давление» на окружающую среду удастся отвести от опасной черты вблизи 10^{14} Вт.

Разумеется, проектов, у которых одни достоинства и нет недостатков, не бывает. Есть они и у КСЭ, причем серьезные. Во-первых, это высокая стоимость вывода в космос столь значительных по массе конструкций. Во-вторых — высокая стоимость самих преобразователей энергии. В-третьих — опасность вредных воздействий на атмосферу выбросов двигательных установок транспортных космических систем. Несомненно, все это весьма серьезные проблемы, однако они носят технический характер. А потому в принципе разрешимы.

На каких путях можно найти решение этих проблем? Есть основания ожидать, что по мере развития ракетно-космической и электронной промышленности к началу XXI века будут созданы новые космические транспортные системы и разработаны высокоэффективные недорогие фотопреобразователи. По оценкам американских специалистов, в перспективе стоимость вывода на околоземную орбиту полезных грузов массой 300—500 т удастся снизить до сотен и десятков долларов в расчете на 1 кг, а стоимость солнечных батарей — до 100 долларов в расчете на 1 кВт производимой электрической мощности. С учетом этих цифр КСЭ мощностью 5—10 ГВт приобретет шестое преимущество — экономическую конкурентоспособность.

А как быть с опасностью загрязнения атмосферы, которой грозит запуск многочисленного флота ракетносителей? Имеется выход и здесь: профессор Принстонского университета в США Дж. О'Нейл предложил использовать для строительства сети

околоземных КСЭ минеральные ресурсы, добываемые на Луне. О'Нейл образно назвал свою идею методом «ботиночной шнуровки»: первую КСЭ сооружают, опираясь на земные ресурсы, а затем используют ее в качестве орбитальной базы для создания на спутнике нашей планеты горнодобывающего и промышленного комплекса.

Не слишком ли мы удалились от современности? — возможно, спросит нас внимательный читатель. — Не лучше ли оставить эти вопросы на рассмотрение нашим потомкам, которым предстоит жить в XXI веке? А у нас хватит и своих проблем...

Напомним скептикам несколько цифр. Запасов нефти осталось на 30 лет, а газа — на 50. Время же перестройки энергетики на новые энергоресурсы, как показывает опыт, весьма значительно — порядка 50 лет. Вдумайтесь в эти цифры и судите, какие решения можно оставить потомкам, а какие предстоит принимать нам самим.



Школа КОСМОНАВТИКИ

В 1986 году при Красноярском государственном университете была организована выездная Школа космонавтики (ШК). Проводится она 3—4 раза в год, обычно в школьные каникулы.

ШК — это временный творческий коллектив, состоящий из школьников старших (8—10) классов, студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников. Задачей этого временного творческого коллектива является профессиональное становление: для опытных преподавателей, научных сотрудников — совершенствование педагогического мастерства; для студентов, аспирантов — углубление знаний изучаемого предмета и приобщение к педагогической деятельности; для школьников — выбор профессии и начальная подготовка к ней.

Основные принципы организации работы ШК следующие: сжатые сроки в сочетании с максимальной нагрузкой; создание условий для неформального общения школьников, студентов, преподавателей и научных сотрудников в интенсивном режиме работы; создание условий для свободного выбора деятельности каждым курсантом и для развития коллективных форм работы «эпикажей».

Десятая ШК стала первой всесоюзной школой космонавтики с участием школьников из Болгарии.

Проходила она с 30 января по 12 февраля 1989 года на базе Высшей комсомольской школы при ЦК ВЛКСМ в Москве. Самое активное участие в организации школы приняло Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество «Союз», организовавшее и экскурсии в Звездный и ЦУП, и встречи с интересными людьми, и помощь в установлении деловых контактов.

Для каждой выездной ШК, которая длится обычно порядка двух недель, создается своя программа, включающая лекции, семинары, работу в дисплейном классе или в лабораториях, проблемные задачи, турниры, марафон, экспресс-опросы, факультативы по интересам, дискуссионные и самодеятельные клубы.

Для примера вкратце опишем программу десятой ШК. Рабочие лекции были следующие: законы Ньютона, гравитация, законы сохранения, физика ближнего космоса, термодинамика, космические

лучи, космическая оптика. Эти лекции сопровождались семинарскими занятиями по экипажам. Читались также популярные лекции и проводились лекции-встречи с ведущими специалистами космической индустрии на темы: классификация космических аппаратов и космических систем, экология и космос, экология замкнутых систем, медико-биологические проблемы космонавтики, космология, изобразительное искусство и космос и т. д.

Были также организованы экскурсии в Кремль, на ВДНХ, в музей Пушкина, в дом-музей Королева, где состоялась встреча с художниками космоса. Поездка в Звездный включала целый ряд тематических лекций-бесед с космонавтами и ведущими специалистами космонавтики. В зале тренажеров обсуждались методики подготовки космонавтов для будущих полетов, в зале испытания на перегрузку диапазон вопросов был самый широкий — от чисто технических, связанных с испытательным стендом, до медико-биологических, обусловленных



Компьютерный факультатив.

влиянием гравитации, в музее, конечно, разговор шел об истории советской космонавтики, традициях и т. д. В центре управления полетами курсантов познакомили с устройством ЦУП, задачами, которые он выполняет, и даже дали самим поработать, т. е. выйти на связь с космонавтами А. Волковым, В. Поляковым и С. Крикалевым.

Кроме лекций и семинаров, в обязательные занятия входила работа в терминальном классе, в лаборатории физического эксперимента и занятия в плавательном бассейне.

Большой популярностью у курсантов пользуется форма учебной работы под названием «Рулетка». Рулетка проводится по экипажам между лекцией и семинарским занятием. В задачу Рулетки входит четкое фиксирование основных информационных моментов (новых понятий, слов, идей, фактов и т. д.), которые были сообщены курсантам во время лекции. Для работы экипаж становится в круг, в центре раскручивается импровизированная рулетка. На кого покажет стрелка, тот и должен отвечать на очередной вопрос. Время, затраченное на ответ, фиксируется, как и суммарное время, затраченное на Рулетку. Результат учитывается в общем соревновании между экипажами. Для примера приведем набор вопросов Рулетки после лекции «Физика ближнего космоса»:

1. Каковы характерные размеры магнитосферы Земли?

2. Чему равна сила Лоренца?

3. По каким траекториям движутся заряженные частицы в однородном магнитном поле?



Заведующий физпрактикумом А. Агапов запускает необычный электростатический двигатель.

4. Как устроена магнитная ловушка?

5. Как движется частица в магнитной ловушке?

6. Чему равна скорость дрейфа?

7. Какой вывод следует из сохранения магнитного момента заряженной частицы?

8. Что такое радиационные пояса Земли и как они устроены?

Кроме обязательных занятий, в ШК был целый ряд факультативов: космическая оптика, основы цифровой техники, история космонавтики, микрокалькуляторы, космология, теория вероятностей, видео клуб PAL—SECAM, английский клуб и т. д. Каждый курсант обязан был посещать один из факультативов.

Для тех, кому не хватало нагрузки, проводились заочные туры: вывешивался список из 5—6 задач, на решение которых давалось четыре дня. Результаты оценивались в баллах, определялось личное первенство и параллельно это учитывалось

в соревновании между экипажами. Задачи были такого типа:

1. Найти скорость, с которой скользит тень по Останкинской башне при заходе Солнца. За какое время вся башня закрасит тенью?

2. Космический корабль вращается вокруг Луны по круговой орбите радиусом $R=3,4 \cdot 10^3$ м. С какой скоростью нужно выбросить из корабля вымпел по касательной к траектории корабля, чтобы он упал на противоположной стороне Луны?

3. Оценить максимальное относительное давление воздуха в футбольном мяче в момент удара.

Каждый рабочий день в ШК начинался с выдачи проблемной задачи на день. Экипаж в течение дня обсуждал задачу, а перед отбоем решение в письменном виде сдавал в учебный отдел. Лучшие работы отмечались на следующий день, а оценки учитывались в общем соревновании между экипажами.

Вот несколько таких задач:

1. Из Красноярска в Москву самолет ИЛ-62 летит 4 ч 45 мин со скоростью 800 км/ч на высоте 10 600 м, а обратно — на 40 мин меньше.

Какие выводы и оценки можно сделать?

2. Оценить, на сколько отличаются расстояния от уровня мирового океана до центра Земли на полюсе и на экваторе.

3. Для исследования физических процессов, происходящих на Солнце, возможен запуск автоматических КА на орбиту с перигелийным расстоянием $0,1 \div 0,2$ а. е. Предложите защиту КА от электромагнитного излучения Солнца.

Если на день планировалась автобусная экскурсия, то учебный отдел специально на этот случай придумывал «автобусную задачу». Оценка решения также учитывалась в экипажном соревновании. Из серии автобусных задач:

1. Едут по полю два богатыря — курсанта ШК и подбрасывают булавы. Первая булава возвращается через неделю, а вторая — через месяц. Оценить, на какое расстояние улетают булавы.

2. Кастрюля с водой стоит на электрической плитке на космическом корабле. Что произойдет при нагревании?

Наиболее важным и, пожалуй, интересным учебным мероприятием ШК, которое традиционно проводится в последний день, является Марафон. Это сложное комплексное соревнование, в котором участвуют абсолютно все. Каждая лаборатория, факультатив, клуб и, разумеется, учебный отдел готовят свою часть конкурса. Помимо физических, математических и т. д. вопро-

сов и задач, число которых — более двух сотен, готовятся компьютерный, литературный, искусствоведческий, спортивный конкурсы и даже певческий конкурс, где побеждает экипаж, который веселее поет. Разрабатывается итоговая Рулетка и много прочих соревнований. Когда все предложения поданы, штаб школы разрабатывает график прохождения каждым экипажем каждого соревнования. График получается настолько сложным, что приходится писать для каждого экипажа маршрутную карту. А экипаж разрабатывает маршрутную карту для каждого курсанта и старается сделать это так, чтобы работать максимум очков. От правильно выбранной тактики существенно зависит успех экипажа в этом комплексном соревновании.

Марафон проходит с очень высоким накалом. Серьезная нагрузка приходится не только на головы курсантов, но и на ноги — в течение пяти часов необходимо побывать на всех конкурсах. Поощрения (множество разных призов от конфеты до сборника стихов Высоцкого) выдаются за победы на отдельных этапах и за комплексный зачет.

В марафоне абсолютными победителями стали красноярцы Алексей Дежурных и Петр Денисенко. А звездами КВН стали Роман Менжинский из Норильска и Сергей Толмачев из Красноярска. Лучшее всех справился с долгосрочными заданиями норильчанин Максим Осадчук.

После подведения итогов марафона определяется лучший экипаж за все время работы ШК. Учитываются абсолютно все ме-

роприятия, даже дежурство по столовой. Победил третий экипаж, инструкторами в котором работали студенты 4 курса физфака Красноярского университета С. Досина и Ю. Сизых.

После окончания Школы космонавтики курсанты не порывают завязавшейся дружбы. Можно сказать, что образуется неформальная группа. Причем бывшие курсанты дружат не только между собой, но и со студентами-инструкторами. Ребята организуют у себя в школах конкурсы подобно тем, что были в ШК. Они — частые гости в Университете, неперенные участники Дней физики на физфаке КГУ. Более того, курсанты ШК выступают и даже получают дипломы на студенческих конференциях.

Десятая ШК была первой международной. Что будет дальше? На июль 1989 года в Красноярске планируется проведение Школы с участием американских, болгарских и польских ребят. Возможно, приедут и китайцы. Ну а потом предполагаются ответные визиты.

В заключение просьба ко всем, кто проводит аналогичные школы или отдельные соревнования. Если вы можете предложить какой-нибудь оригинальный конкурс, напишите по адресу: 660062, Красноярск, пр. Свободный, 79, КГУ. Школа космонавтики.

Н. Н. Носков, С. К. Столбоушкин

Черот и галфоломки

Амбиграммы

Нашим читателям вряд ли нужно представлять замечательного популяризатора математики М. Гарднера. В течении многих лет он вел математический раздел журнала «Scientific American». После ухода М. Гарднера на пенсию его сменил Даглас Хофстадтер, который назвал этот раздел «Метамагические темы». Д. Хофстадтер — человек с широким кругом научных интересов, включающим математику, физику, теоретическое программирование, генетику и философию. Его книга «Гедель, Эшер, Бах: вечная золотая коса», посвященная математическим идеям выдающегося логика Курта Геделя и созвучным им мотивам творчества М. Эшера и И.-С. Баха, была включена в списки бестселлеров, а ее автор получил почетную Пулитцеровскую литературную премию. Другая его книга содержит собрание статей, опубликованных Хофстадтером в «Scientific American».

Д. Хофстадтер — профессор теоретического программирования Индианского университета в США. Сейчас он работает над книгой, посвященной «амбиграммам» — так Д. Хофстадтер называет надписи, которые читаются по-разному в зависимости от того, как их расположить*). Профессор Хофстадтер любезно предоставил «Кванту» несколько амбиграмм. Все они, конечно, написаны

по-английски. Автор предлагает читателям «Кванта» попробовать свои силы в составлении амбиграмм на русском языке. Наиболее интересные из них он готов опубликовать в своей книге об амбиграммах.

USA

1. Вы, конечно, легко прочитали «USA», т. е. США. Поверните страницу по часовой стрелке на 90° и вы прочитаете «СССР». Д. Хофстадтер надеется, что эта амбиграмма созвучна новому стилю взаимоотношений наших стран.

Четыре амбиграммы с «физическим смыслом».

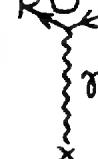
ZOH

2. Здесь написана фамилия одного из самых крупных физиков XX века — Нильса Бора. Поверните рисунок на 90° против часовой стрелки...

LIGHT IS A
WAVE!

3. Чем же все-таки является свет: волной или частицей? Здесь написаны оба утверждения: «light is a wave» («свет — волна») и «light is a particle» («свет — частица»).

POSITRON
(+ →)



4. Позитрон — частица, двойственная электрону. На этом рисунке написано «positron», но если перевернуть страницу и прочесть надпись на просвет, то вы увидите «electron».

SCHRODINGER

5. Наибольшие заслуги в открытии квантовой механики принадлежат двум ученым: Шредингеру и Гейзенбергу. На этом рисунке вы видите фамилию одного из них, а если картинку повернуть на 180° , то вы прочитаете фамилию другого.

Следующие четыре амбиграммы посвящены великим деятелям науки и искусства.

BACH

6. Это — немецкий композитор И.-С. Бах. Поверните рисунок на 90° против часовой стрелки: «фуга» — музыкальная форма, которой Бах широко пользовался.

NEWTON

7. «Ньютон» — на этой амбиграмме его имя выдерживает поворот на 180° .

SALVADOR
DALI

8. «Сальвадор Дали», репродукция картин которого появлялись в «Кванте». Переверните страницу и прочитайте надпись на просвет...

* Слово «амбиграммы» буквально означает «двойственные изображения».

WOLFGANG
AMADEUS

9. Здесь написано «Вольфганг Амадеус». Перелистните страницу и поверните ее на 180° — вы прочтаете «Амадеус Моцарт». Три последние амбиграмы — географические названия. Все они обладают симметрией.

hungary

10. «Hungary» — это Венгрия. Надпись выдерживает поворот на 180° .

11. Такой же симметрией обладает «Чикаго».

chicago

12. А город «Атланта» не меняется, если рассматривать его на просвет.

ATLANTA

Может быть, вам захочется перерисовать амбиграмы на кальку — так удобнее рассматривать их на просвет.

Итак, предлагаем вам попробовать свои силы в изобретении амбиграмм. Лучшие из них мы опубликуем.

Вниманию наших читателей

Магазин № 3 «Академкнига» г. Москвы высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1988. — 35 к.

Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. *Справочник по элементарной физике.* Изд. 10-е, испр. и доп. — 1988. — 1 р. 10 к.

Пособие по математике для поступающих в вузы. Изд. 3-е, перераб. — 1988. — 1 р. 80 к.

Простое и сложное в программировании. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1988. — 35 к.

Формирование радиоэлектроники. (Радиоэлектроника в ее историческом развитии). — 1988. — 3р. 30 к.

Фролова Г. В. *Педагогические возможности ЭВМ. Опыт. Проблемы. Перспективы.* (Наука и технический прогресс). — 1988. — 70 к.

Готовятся к печати:

Абрамов С. А., Зима Е. В. *Основы информатики.* (Библиотечка программиста). — 1989. — 1 р.

Арсак Ж. *Программирование игр и головоломок.* Пер. с фр. (Библиотечка программиста). — 1989. — 90 к.

Задачи по математике. Начала анализа. Справочное пособие. — 1989. — 1 р. 70 к.

Клейн Ф. *Лекции о развитии математики в XIX столетии.* В 2-х т. Пер. с нем. Т. 1. — 1989. — 2 р. 50 к.

Кэрролл Л. *Логическая игра.* Пер. с англ. (Библиотечка «Квант»). — 1989. — 50 к.

Меледин Г. В. *Физика в задачах: Экзаменационные за-*

дачи с решениями. Изд. 2-е, перераб. и доп. — 1989. — 70 к.

Цыпкин А. Г., Пинский А. И. *Справочник по методам решения задач по математике для средней школы.* Изд. 2-е, перераб. и доп. — 1989. — 1 р. 90 к.

Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования.* — 1989. — 1 р. 90 к.

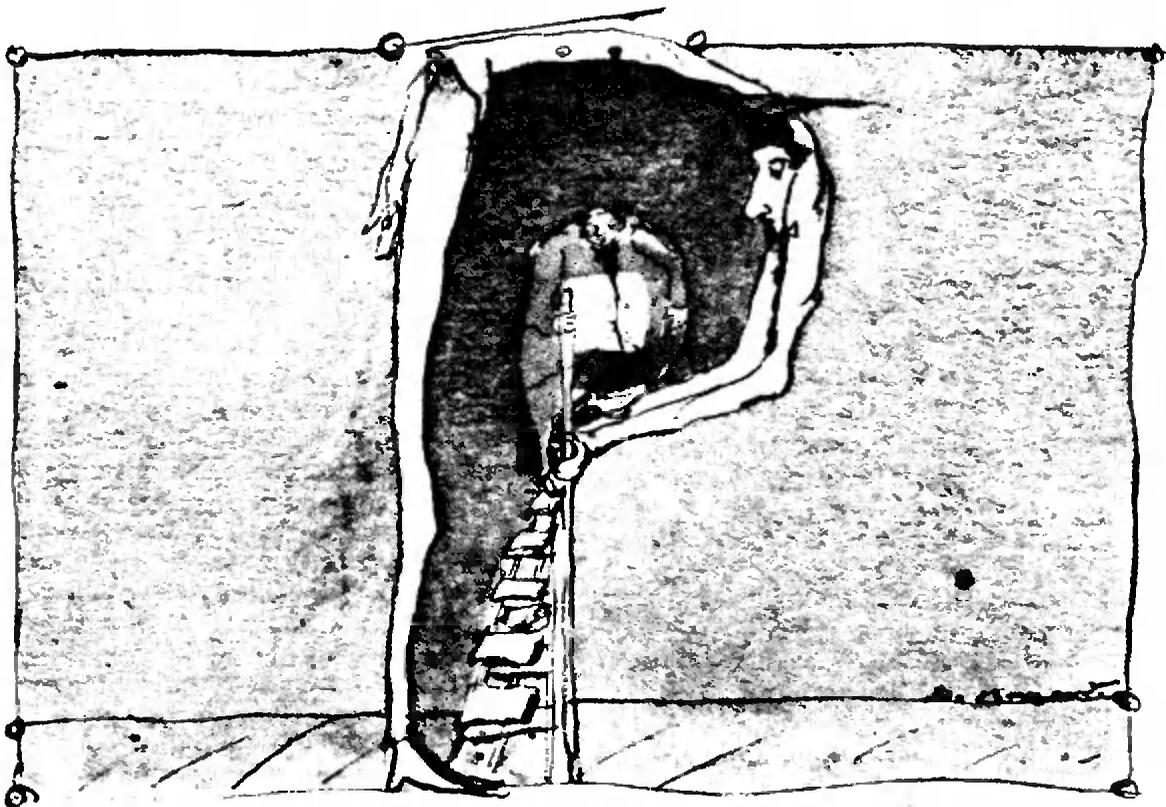
Заказы направляйте по адресу: 117393 Москва, ул. Академика Пилюгина, дом 14, корп. 2, магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкнига».

* * *

Отдел «Книга — почтой» Свердловского облкниготорга высылает наложенным платежом книгу: Новосельцев В. И. *Организм в мире техники: Кибернетический аспект.* (Проблемы науки и технического прогресса). — 1989. — 85 к.

Заказы направляйте по адресу: 620014 Свердловск, ул. Малышева, дом 29.

Напоминаем вам, что подписаться на наш журнал вы можете в агентствах «Союзпечати», на почтамтах или в отделениях связи, начиная с любого номера (но не позднее первого числа предподписного месяца). Если же вы хотите оформить годовую (на 1990 год) подписку, это надо сделать до 1 октября 1989 года. Индекс «Кванта» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 45 копеек, стоимость годовой подписки 5 рублей 40 копеек.



Техникум электротехники

Мощность в цепи постоянного тока

А. В. КОРЖУЕВ

Вспомним основные закономерности, которые используются при решении задач на расчет цепей постоянного тока.

Пусть имеется простая (неразветвленная) замкнутая цепь (рис. 1), содержащая источник тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r и резистор сопротивлением R (его называют также внешним сопротивлением). Согласно закону Ома для такой цепи, в ней течет ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

При этом напряжение на внешнем участке цепи равно

$$U = \mathcal{E} - Ir,$$

мощность, выделяемая на резисторе, равна

$$P_{\text{вн}} = IU,$$

а полная мощность источника —

$$P_{\text{п}} = I\mathcal{E}.$$

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач, в которых обсуждается, прежде всего, вопрос о мощности постоянного тока.

Задача 1. *Электрическая цепь содержит источник, ЭДС которого \mathcal{E} и внутреннее сопротивление r , и резистор сопротивлением R (см. рис. 1). Вычислите полную мощность, выделяемую источником, мощность, отдаваемую во внешнюю цепь (полезную мощность), и КПД источника. Проанализируйте зависимость этих величин от внешнего сопротивления.*

Согласно закону Ома, по цепи течет ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

Мощность, выделяемая на участке це-

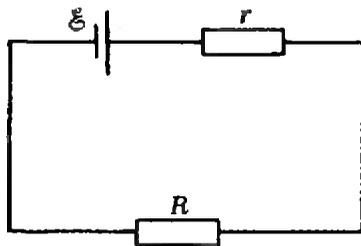


Рис. 1.

пи с напряжением U , по определению равна $P=IU$. В нашем случае

$$P_{\text{вн}} = IU = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

Полная мощность источника равна

$$P_{\text{п}} = I\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r},$$

а его КПД —

$$\eta = \frac{P_{\text{вн}}}{P_{\text{п}}} = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{1+r/R}.$$

Проанализируем теперь зависимость всех найденных величин от внешнего сопротивления R . Видно, что с увеличением R полная мощность будет уменьшаться, а КПД наоборот возрастать — при возрастании R все большая доля полной мощности выделяется на внешнем участке цепи (по сравнению с мощностью, выделяющейся внутри источника). Сложнее обстоит дело с мощностью, выделяющейся в реостате. Из выражения $P_{\text{вн}} = \mathcal{E}^2 R / (R+r)^2$ следует, что $P_{\text{вн}} = 0$ при $R=0$ (что вполне естественно) и при $R \rightarrow \infty$. Очевидно, существует такое значение R , при котором полезная мощность максимальна. Его легко найти, продифференцировав $P_{\text{вн}}$ по сопротивлению R и приравняв эту производную нулю:

$$P'_{\text{вн}} = \frac{\mathcal{E}^2 (R+r)^2 - 2\mathcal{E}^2 R (R+r)}{(R+r)^4} = 0,$$

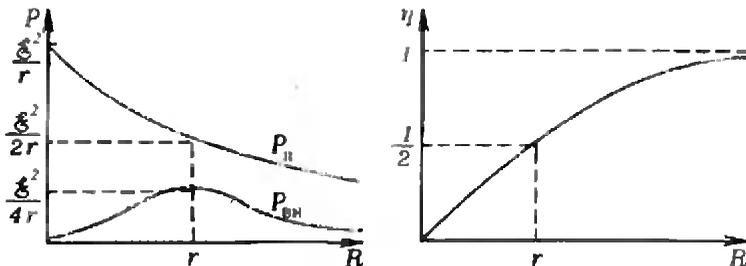
откуда получаем

$$R = r$$

— $P_{\text{вн}}$ максимально и равно $\mathcal{E}^2 / (4r)$ при условии равенства внешнего и внутреннего сопротивлений. Однако КПД при этом равен

$$\eta = \frac{R}{R+R} = \frac{1}{2},$$

Рис. 2.



т. е. половина всей вырабатываемой мощности выделяется на внутреннем сопротивлении источника. В свою очередь, КПД максимален и равен 1 при $R \rightarrow \infty$, но $P_{\text{вн}}$ при этом стремится к нулю. Таким образом, достичь одновременно максимальной и наиболее эффективной энергоотдачи в такой цепи не удастся. Проигрывая в выделяемой мощности, мы выигрываем в КПД, и наоборот.

Графики зависимости $P_{\text{вн}}$, $P_{\text{п}}$ и η от внешнего сопротивления R изображены на рисунке 2. Графики наглядно подтверждают, что при $R=0$ вся мощность выделяется на внутреннем сопротивлении источника. При $R=r$ мощность, отдаваемая во внешнюю цепь, равна половине всей вырабатываемой мощности, КПД при этом равен 1/2. По мере увеличения R графики зависимости $P_{\text{п}}(R)$ и $P_{\text{вн}}(R)$ все плотнее приближаются друг к другу, мощность, выделяемая на внутреннем сопротивлении, уменьшается. При $R \gg r$ почти вся вырабатываемая мощность выделяется во внешней цепи и КПД стремится к 1.

Задача 2. По цепи, изображенной на рисунке 1, течет ток I . Считая известными \mathcal{E} и r источника, вычислите мощность, выделяемую во внешней цепи, полную мощность и КПД

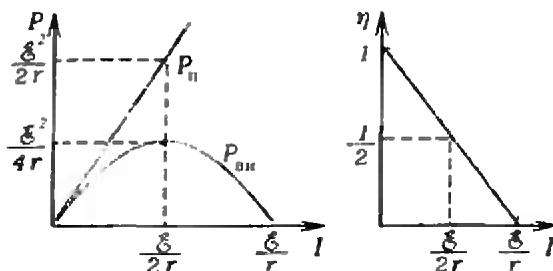


Рис. 3.

источника. Проанализируйте зависимость этих величин от тока в цепи.

Очевидно, что

$$P_n = I\mathcal{E},$$

а $P_{вн}$ найдем, вычитая из полной мощности мощность, выделенную на внутреннем сопротивлении источника:

$$P_{вн} = \mathcal{E}I - I^2r.$$

Тогда КПД

$$\eta = \frac{P_{вн}}{P_n} = \frac{\mathcal{E}I - I^2r}{\mathcal{E}I} = 1 - \frac{Ir}{\mathcal{E}}.$$

С ростом тока I полная мощность линейно растет (т.к. $\mathcal{E} = \text{const}$), а КПД падает — увеличение тока может быть достигнуто уменьшением внешнего сопротивления, а значит, уменьшением доли $P_{вн}$ по сравнению с мощностью, выделяющейся на внутреннем сопротивлении. Зависимость $P_{вн}$ от I — квадратичная. $P_{вн}$ обращается в ноль при $I=0$ и при $I=\mathcal{E}/r$. Значит, существует некоторое значение тока, при котором полезная мощность максимальна. Произведя дифференцирование по току, найдем

$$P'_{вн} = \mathcal{E} - 2Ir = 0, \text{ если } I = \frac{\mathcal{E}}{2r}.$$

При этом $P_{вн \text{ max}} = \mathcal{E}^2/(4r)$, что согласуется и с задачей 1.

Для наглядного истолкования полученных результатов построим графики зависимости всех найденных величин от тока (рис. 3). Как и в предыдущей задаче, максимальная внешняя мощность соответствует значению КПД, равному 1/2; при токе $I = \mathcal{E}/r$ $P_{вн} = 0$ (это тот случай, когда внешнее сопротивление равно 0) и $\eta = 0$.

Задача 3. Известно, что со временем батарея, составленная из галь-

ванических элементов, «садится» (ее ЭДС падает). Как зависит мощность во внешней цепи, полная мощность и КПД от ЭДС источника \mathcal{E} (см. рис. 1)? Считать, что внутреннее сопротивление r источника не изменяется.

Как уже было получено в задаче 1,

$$P_n = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}, \quad P_{вн} = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2},$$

$$\eta = \frac{R}{R+r}.$$

Из этих выражений видно, что при падении \mathcal{E} и полная мощность, и мощность, выделяемая во внешнюю цепь, уменьшаются, причем и та, и другая — по квадратичному закону, а КПД остается неизменным до тех пор, пока ЭДС источника не станет равной нулю и процесс выделения мощности не прекратится совсем.

Соответствующие графики изображены на рисунке 4.

Задача 4. Электромотор, сопротивление обмотки якоря которого равно R , питается от источника постоянного напряжения U , при этом через него протекает ток I (рис. 5). Вычислите потребляемую мотором мощность, мощность, теряемую на нагрев обмотки, и КПД мотора. Проанализируйте зависимость указанных величин от тока в моторе.

От источника мотор отбирает мощность

$$P_{от} = IU.$$

При этом на нагрев обмотки, в соответствии с законом Джоуля — Ленца, затрачивается тепловая мощность

$$P_r = I^2 R.$$

Разность между этими величинами

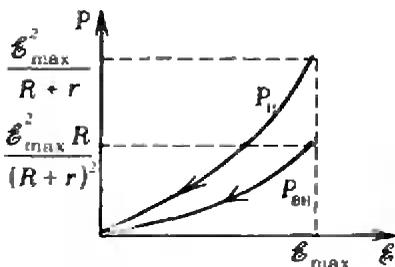


Рис. 4.

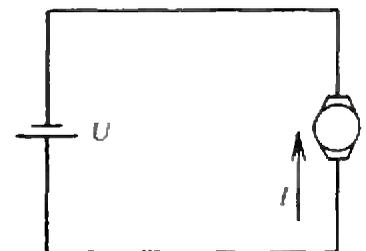
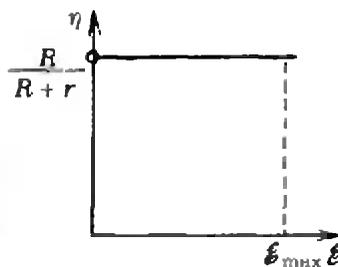


Рис. 5.

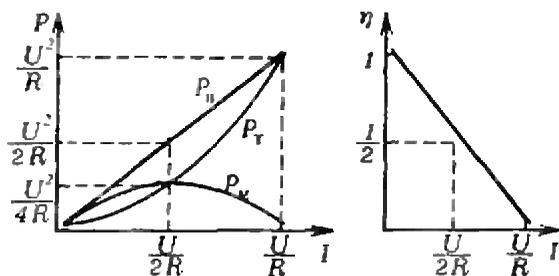


Рис. 6.

и есть механическая мощность:

$$P_m = P_{от} - P_т = IU - I^2R.$$

КПД мотора по определению равен отношению механической мощности к мощности, потребляемой от источника:

$$\eta = \frac{P_m}{P_{от}} = \frac{IU - I^2R}{IU} = 1 - \frac{IR}{U}.$$

Как видно, тепловая мощность с увеличением тока растет по квадратичному закону, мощность, получаемая мотором от источника, — по линейному, а КПД с увеличением тока падает — увеличивается мощность тепловых потерь в обмотке. Проводя для механической мощности рассуждения, аналогичные проведенным в задаче 2 для \$P_m\$, заключаем, что существует некоторое значение тока, при котором \$P_m\$ максимальна. Дифференцируя выражение для \$P_m\$ по току и приравнявая производную нулю, получаем, что эта сила тока равна \$U/(2R)\$.

Из приведенных на рисунке 6 графиков видно, что по мере увеличения тока механическая мощность вначале оказывается больше тепловой, а затем

меньше ее. При токе \$I = U/(2R)\$ обе мощности одинаковы и КПД равен \$1/2\$ — половина всей вырабатываемой мощности превращается в механическую. При возрастании тока от \$U/(2R)\$ до \$U/R\$ тепловая мощность растет, а механическая падает, причем рост тепловых потерь происходит быстрее, чем рост полной мощности. Это значит, что все большая часть вырабатываемой мощности выделяется на сопротивлении обмотки двигателя и КПД падает. Наконец, при токе \$I = U/R\$ вся вырабатываемая источником мощность расходуется в виде тепла и КПД становится равным нулю.

Упражнения

1. Для цепи, изображенной на рисунке 1, вычислите напряжение на внешней участке и мощность, выделяющуюся на внутреннем сопротивлении источника, считая известными \$\mathcal{E}\$, \$r\$ и \$R\$. Проанализируйте зависимость этих величин от внешнего сопротивления \$R\$. Постройте соответствующие графики.

2. В цепи (см. рис. 1) течет ток \$I\$. Вычислите мощность, выделяющуюся на внутреннем сопротивлении источника. Проанализируйте и изобразите графически ее зависимость от тока \$I\$. Считать \$\mathcal{E}\$, \$r\$ и \$R\$ известными.

3. Для цепи, содержащей источник с ЭДС \$\mathcal{E}\$ и внутренним сопротивлением \$r\$ и резистор сопротивлением \$R\$, вычислите мощность, выделяющуюся на внутреннем сопротивлении, и проанализируйте ее зависимость от ЭДС (считая, что она постепенно падает). Постройте график.

4. Аккумулятор с внутренним сопротивлением \$r\$ необходимо подзарядить с помощью источника постоянного напряжения \$U\$. Найдите мощность, расходуемую на подзарядку, мощность тепловых потерь на внутреннем сопротивлении аккумулятора, мощность, потребляемую от источника, и КПД заряжающего источника. Проанализируйте зависимость этих величин от ЭДС аккумулятора и построьте соответствующие графики.

Нам пишут

В недавно вышедшей книге «Задачи всесоюзных математических олимпиад» (М., Наука, 1989) содержится такая задача (к сожалению, опубликованная с опечаткой):

Докажите тождество

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Наш читатель А. М. Колесников из Ростовской области предлагает обобщение этой задачи, верное

для любого \$s \ge 1\$:

$$\sum_{k=1}^n (k!)^s ((k+1)^s - 1) = ((n+1)!)^s - 1.$$

Предлагаем вам доказать эту красивую формулу.

Задачи вступительного экзамена по математике в Оксфордский университет

В этом номере мы публикуем задачи вступительного экзамена по математике в Оксфордский университет — старейший английский университет, основанный в 1168 году. В течение многих веков его выпускники составляли славу страны. И ныне, наряду с Кембриджем, Оксфордский университет является наиболее авторитетным высшим учебным заведением Великобритании.

Задачи, которые мы предлагаем вниманию читателей, предназначались для абитуриентов 1988 года, избравших своей будущей специальностью математику и механику. Оксфордский экзамен по математике проводится по традиции в два дня (в прошлом году — 21 и 22 ноября), причем оценивается лишь лучшая из двух попыток.

В первый день предлагалось 12 задач, разбитых на группы А, Б и В. Никаких ограничений на число решенных задач не накладывалось, однако при выводе общей оценки учитывалась задача 1 и три лучшие решения задач 2—12, причем наивысшая оценка за задачу 1 вдвое превышала оценку за любую другую задачу. Во второй день предлагалось 16 задач, разделенных на группы А, Б, В, Г. Все задачи оценивались одинаковым количеством баллов, но в зачет шло только пять лучших решений. Баллы, полученные абитуриентом в лучшей из двух попыток, возводились в квадрат и складывались. Поскольку сумма квадратов максимальных чисел баллов примерно равна числу поступающих, это позволяет легко упорядочить абитуриентов по результатам.

В прошлом году конкурс на математическое отделение Оксфордского университета составлял примерно 2 человека на место.

Математика I

Группа А

1. а) Разложите на простейшие дроби функцию

$$\frac{5x+1}{(x^2+2)(2x-1)}.$$

б) Найдите $f'(x)$, где

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{e^{-x}+1}.$$

в) Найдите площадь, ограниченную кривыми

$$y = x^3 \text{ и } y^3 = 16x.$$

г) Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} 2x = 2\sin x$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

д) Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$ на отрезке $[0; 2]$.

е) Вычислите $\int_0^1 \operatorname{arcsin} x dx$.

ж) Упростите выражение

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

з) Пусть $A(2; 1; -1)$, $B(3; 2; -1)$, $C(3; 1; 0)$ — точки в пространстве. Найдите величину угла BAC .

и) Пусть $\max\{a, b\}$ — наибольшее из чисел a и b . Постройте график функции $y = m(x) = \max\{1; x\}$ при $x \in [0; 3]$ и вычислите

$$\int_0^3 m(x) dx.$$

к) Постройте график $y^2 = x^3 - x$.

Группа Б

2. а) Пусть a_1, b_1, a_2, b_2 — действительные числа. Докажите, что если для каждой пары действительных чисел c_1 и c_2 система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

имеет единственное решение, то $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Докажите также, что при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ и любых c_1 и c_2 система (1) имеет единственное решение.

б) Докажите, что если для каждой пары действительных чисел c_1 и c_2 уравнения

$$\begin{cases} 2z^3 - z + c_1 = 0, \\ a_2z^3 + b_2z + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеют общий корень, то $2b_2 + a_2 \neq 0$.

Кроме того, если общий корень у этих уравнений имеется, то

$$(-c_2 - c_1b_2)(2b_2 + a_2)^3 = (a_2c_1 - 2c_2)^3.$$

3. Пусть S — окружность с центром O и радиусом l .

а) Пусть $Q \neq O$ — точка внутри S , а T — точка на S такне, что $OQ \perp QT$, а R точка на отрезке OQ , для которой $TR \perp OT$. Постройте чертеж и докажите, что $OQ \cdot OR = l^2$.

б) Пусть P — произвольная точка и P' точка на луче OP такая, что $OP \cdot OP' = l^2$. Приняв точку O за начало координат, докажите, что если точка P лежит на прямой $x = l/2$, то P' лежит на окружности радиусом l с центром $(l, 0)$.

4. Пусть $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, где $\theta \in \mathbb{R}$.

а) Докажите, что $R_\theta \cdot R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$. Найдите все значения θ , для которых $R_\theta = J$, где J — единичная матрица.

б) Докажите, что $R_{-\theta} = (R_\theta)^{-1}$.

в) Пусть n — натуральное число. Докажите, что $R_0^n = J$ тогда и только тогда, когда $\theta = 2\pi m/n$, где m — целое число.

г) Пусть $\theta = 2\pi/n$, где n — натуральное число и $R_\theta = A^{-1}R_0A$ для некоторой матрицы A . Докажите, что $\varphi = 2\pi k/n$, где k — целое.

5. Пусть $z \neq 1$ — положительное число и $w = \frac{z+1}{z-1}$.

а) Докажите, что $z = \frac{w+1}{w-1}$.

б) Докажите, что если $z = ia$, где $a \in \mathbb{R}$, то $|w| = 1$ и, наоборот, если $|w| = 1$, то $z = i\bar{a}$, где $a \in \mathbb{R}$.

в) Докажите, что если $z = itg \theta$, то $w = e^{-2i\theta}$.

г) Выразите $tg 4\theta$ через $tg \theta$.

6. а) Разложите на линейные множители многочлен $x^2 + 2i$.

б) Разложите $x^4 + 4$ на 4 линейных множителя.

в) Докажите, что $x^4 + 4$ является произведением двух квадратичных многочленов с целыми коэффициентами.

г) Для каких натуральных n число $n^4 + 4$ — простое?

7. Пусть S — множество действительных чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — целые, причем $a^2 - 2b^2 = \pm 1$. Докажите, что

а) если $r \in S$, то $1/r \in S$;

б) если $r \in S$ и $s \in S$, то $rs \in S$.

Найдите (подбором) число $r \in S$ такое, что $r > 1$. Докажите, что S — бесконечное множество и что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечное число решений в целых числах.

Группа В

8. а) Вычислите

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2rx - \sin 2(r-1)x}{\sin x} dx,$$

где r — натуральное число.

Пользуясь этим результатом (или как-нибудь иначе), докажите, что при натуральном n

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx = 2 \left[1 - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1} / 2n - 1 \right]$$

б) Докажите, что

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx.$$

в) Для любого $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ докажите, что

$$\int_0^a \ln |1 + tg \theta \cdot tg x| dx = \int_0^a \ln \left(\frac{1 + tg^2 \theta}{1 + tg \theta tg x} \right) dx,$$

и получите отсюда, что

$$\int_0^{\theta} \ln |1 + tg \theta \cdot tg x| dx = -\theta \ln \cos \theta.$$

9. Пусть $m(a)$ наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 2a(x-2) - 4a^2$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$, где a — произвольное действительное число. Найдите $m(a)$ и постройте график этой функции. Найдите наибольшее значение $m(a)$.

10. Пусть $J(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x} dx$, где $a > 0$. Пользуясь интегрированием по частям (или иначе), докажите, что для любого целого $N \geq 0$

$$J(a) = \sum_{r=0}^N \frac{(-1)^r r!}{a^{r+1}} + \frac{(-1)^{N+1} (N+1)!}{a^{N+1}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} dx}{(1+x)^{N+2}}.$$

Отсюда получите оценку

$$\frac{93}{648} < J(6) < \frac{95}{648}.$$

11. Проверьте, что функция $y = e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения

$$(x+2) \frac{d^2 y}{dx^2} - (2x+5) \frac{dy}{dx} + 2y = 0. \quad (*)$$

Покажите, что подстановка $y = ue^{2x}$, где u — функции от x , приводит к дифференциальному уравнению относительно функции $w = du/dx$. Решите это уравнение относительно w и получите в качестве следствия общее решение уравнения (*).

Найдите решение (*), удовлетворяющее условиям $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

12. Докажите, пользуясь графиком, что уравнение $x = tg x$ имеет бесконечную последовательность положительных решений $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, где $n\pi < \alpha_n < (n+1)\pi/2$.

Затем докажите, также пользуясь графиком, что уравнение

$$\sin x = ax, \quad x > 0,$$

не имеет решений при $a > 1$, имеет одно решение при $\cos \alpha_2 < a < 1$, имеет $2n-1$ решение при $\cos \alpha_{2n} < a < \cos \alpha_{2n-1}$ (при $n > 1$).

Математика II

Группа А

1. В треугольнике ABC точка D на BC и E на AC таковы, что прямая AD перпендикулярна BC , а прямая BE перпендикулярна AC . Докажите, что треугольники ADC и BEC подобны.

Пусть BE пересекает AD в точке H , а CH пересекает AB в точке F . Докажите, что $AE/EB = HE/EC$.

Докажите, что прямая CF перпендикулярна AB .

Пусть точки X, Y, Z и W — середины отрезков BH, AB, AC и CH . Докажите, что

XY , AD и WZ параллельны. Докажите также, что параллельны YZ , XW и BC .

Докажите, что $XYZW$ — прямоугольник.

2. Рассмотрим окружность C_1 , задаваемую в прямоугольной системе координат уравнением $x^2 + y^2 - 2x \cos b + 1 = 0$, где b — действительное число такое, что $0 < b < \pi/2$.

Найдите центр A_1 и радиус r_1 окружности C_1 .

Рассмотрите прямую l , проходящую через начало координат O и касающуюся окружности C_1 в точке P . Найдите длину отрезка OP и величину угла POA_1 .

Рассмотрим затем окружность C_2 , задаваемую уравнением $x^2 + y^2 - 2y \operatorname{tg} a - 1 = 0$, где $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Найдите центр A_2 и радиус r_2 окружности C_2 .

Выразите расстояние A_1A_2 через r_1 и r_2 . Пусть C_1 и C_2 пересекаются в точках R и S . Докажите, что углы A_1RA_2 и A_1SA_2 — прямые.

3. Три различные точки B, C, D , лежащие на плоскости, определяются тремя векторами \vec{b}, \vec{c} и \vec{d} с общим началом O .

Докажите, что B, C и D лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\alpha\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu\vec{d} = 0$ для некоторых чисел α, μ, ν , не равных одновременно нулю и удовлетворяющих условию $\alpha + \mu + \nu = 0$.

Далее докажите, что точки B, C и D лежат на одной прямой и точка D делит BC в отношении $\gamma:\beta$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{d} = (\beta\vec{b} + \gamma\vec{c})(\beta + \gamma)^{-1}.$$

Четвертая точка A плоскости определяется вектором $\vec{OA} = \vec{a}$ с тем же началом O и не лежит на прямой BC . Докажите, что всякая точка P , принадлежащая треугольнику ABC и лежащая на AD , задается вектором

$$\vec{OP} = \vec{p} = (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})(\alpha + \beta + \gamma)^{-1},$$

где α — некоторое положительное число.

Если точке Q соответствует вектор $\vec{q} = \vec{OQ}$ такой, что

$$\vec{q} = (-\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})(-\alpha + \beta + \gamma)^{-1},$$

то точка Q лежит на прямой AP .

4. Пусть a и c — действительные числа, а b — комплексное число такое, что $ac < bb$ (\bar{b} — число, комплексно сопряженное с b).

Докажите, что множество точек комплексной плоскости $z = x + iy$, удовлетворяющих уравнению

$$az\bar{z} + b\bar{z} + bz + c = 0,$$

являются окружностью при $a \neq 0$ и прямой при $a = 0$.

В случае $a = 0$ докажите, что если прямая касается единичной окружности $z\bar{z} = 1$, то b и c удовлетворяют соотношению $c^2 = abb$.

Докажите, что при преобразовании

$$z \rightarrow w = \frac{1}{z}$$

а) точки единичной окружности неподвижны;

б) прямая, заданная уравнением $\bar{b}z + bz + c = 0$ и касающаяся единичной окружности,

преобразуется в окружность, проходящую через начало координат. Чему равен радиус этой окружности?

Группа Б

5. Легкая лестница длиной l прислонена к стене под углом θ от вертикали.

Человек весом W стоит на лестнице на высоте Y от пола.

Докажите, что в момент, когда лестница начинает скользить, нормальные реакции R_1 и R_2 пола и стенки равны соответственно

$$R_1 = \frac{W}{1 + \mu_1\mu_2}; \quad R_2 = \frac{\mu_1 W}{1 + \mu_1\mu_2},$$

где μ_1 и μ_2 — коэффициенты трения лестницы о пол и стену, соответственно.

Докажите, что лестница будет соскальзывать, только если

$$Y > \frac{\mu_1 l \cos \theta (\mu_2 + \operatorname{ctg} \theta)}{1 + \mu_1\mu_2}.$$

Отсюда покажите, что человек сможет взобраться на самый верх лестницы, если

$$\operatorname{tg} \theta < \mu_1.$$

6. Теннисист, находящийся в точке $x=0$ на оси Ox посылает мяч в стенку, перпендикулярную оси Ox в точке $x=X$. Пусть при своем n -м ударе он посылает мяч с высоты h_n со скоростью v_n под углом θ к горизонту. На какой высоте над осью Ox мяч ударится о стенку (сопротивлением воздуха пренебречь)? При отражении от стенки вертикальная составляющая скорости мяча не меняется, а горизонтальная умножается на коэффициент восстановления e . Докажите, что высота h_{n+1} , на которой окажется мяч при возвращении к теннисисту, удовлетворяет соотношению

$$h_{n+1} = h_n + \left(1 + \frac{1}{e}\right) X \operatorname{tg} \theta -$$

$$- \frac{gX^2}{2v_n^2 \cos^2 \theta} \left(1 + \frac{1}{e}\right)^2$$

(перед возвращением мяч не ударяется о горизонтальную поверхность).

Докажите, что теннисист может поддерживать «стационарный режим» (т. е. $h_{n+1} = h_n$ при всех n), если он посылает мяч со скоростью

$$v = (g(1 + e)X / \operatorname{esin} 2\theta)^{1/2}.$$

7. Частица массой m прикреплена с помощью легкой упругой нити жесткостью α и длиной a к другой частице массой M . В начальный момент обе частицы находятся в одной точке O . Частицу массой m бросают со скоростью v , а частицу массой M отпускают. Пусть x и y — расстояния от первой и второй частиц до точки O соответственно в момент времени t . Докажите, что расстояние между частицами становится равным a через время a/v ; найдите положения частиц и их скорости в этот момент. Докажите, что при $x - y > a$, x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{\alpha}{ma}(x - y - a),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g + \frac{\alpha}{ma}(x-y-a).$$

Выполнив замену переменной $z = x - y - a$ (или иначе), докажите, что нить в следующий раз достигнет длины a через время

$$l \left(\frac{\alpha}{a} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

8. Пуля летит в горизонтальном направлении со скоростью v_0 , ударяется изнутри о вертикальную стенку круглой арены и продолжает отражаться от стенок арены. Пренебрегая сопротивлением воздуха и притяжением Земли и считая, что тангенциальная составляющая скорости пули при рикошете не меняется, а радиальная составляющая скорости умножается на ϵ при каждом рикошете, докажите, что

$$\alpha_n = \text{tg}^{-1}(\epsilon^{-n} \text{tg} \alpha_0),$$

где α_n — угол, образуемый траекторией пули с радиусом арены после n -го отражения, а α_0 — начальный угол отражения.

Выведите отсюда, что если $\epsilon < 1$, то $\alpha_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть θ_n — угол, образуемый направлением радиуса n -й точки соударения пули и стены с некоторым фиксированным направлением.

Докажите, что $\theta_{n+1} = \theta_n + \pi - 2\alpha_n$. Докажите, что $\theta_n = \theta_1 + (n-1)(\pi - 2\alpha_0)$ при $\epsilon = 1$. Отсюда получите, что в этом случае пуля в конце концов вернется в точку первого соударения тогда и только тогда, когда существуют такие целые p и q , что $2\alpha_0/\pi = p/q$.

Группа В

9. Люстра состоит из семи ламп, расположенных по окружности. В течение года каждая из ламп может перегореть с вероятностью $1/2$. Предполагая, что лампы перегорают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что к концу года перегорят не менее чем четыре лампы.

Если перегорели 3 лампы, то какова вероятность, что никакие две из них не были соседними?

Я решил, что в конце года буду заменять все перегоревшие лампы, лишь если какие-то две из них окажутся соседними. Найдите вероятность этого события. Если это произойдет, то какова вероятность, что мне потребуется больше двух ламп? (Полная оценка будет выставлена лишь в случае ясного и точного объяснения, какие события должны быть рассмотрены на каждой стадии решения.)

10. Дует сильный западный ветер. Дерево T высотой 20 м может быть вырвано с корнем и повалено. Пусть B — угол возможного направления падения дерева с направлением север — юг. Известно, что

$$P(0 \leq B \leq 180^\circ) = 3x^2 - 2x^3; \quad 0 \leq x \leq 1.^*)$$

*) Через $P(0 \leq B \leq 180^\circ)$ обозначена вероятность того, что градусная мера угла направления падения дерева с направлением север — юг лежит в указанных пределах.

Докажите, что направления падения дерева на север или на юг относительно направления на восток равновероятны.

Железная дорога идет прямо на север на расстоянии $10\sqrt{2}$ к востоку от дерева. Найдите вероятность того, что ствол дерева попадет на рельсы.

В 50 м к северу и в 50 м к югу от дерева T находятся еще два таких же дерева. Каждое из деревьев независимо от остальных падает от ветра с вероятностью $4/5$. Предполагая, что железная дорога заблокирована по крайней мере одним деревом, найдите вероятность того, что более чем одно дерево придется убирать с путей.

11. Пусть x_1, x_2, \dots независимые случайные величины с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , а n — положительное целое число. Найдите математические ожидания и дисперсии величин: а) nx_1 , б) $x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Массы стандартных европейских яблок распределены по нормальному закону со средним значением 125 г и средне-квадратичным отклонением 11,6 г. Ленивый британский торговец фруктами продает яблоки предположительно по 40 пенсов за фунт, но в действительности берет 40 пенсов за пакет с четырьмя случайно выбранными яблоками. Вычислите среднее значение и дисперсию веса пакета.

Торговый инспектор регулярно инкогнито посещает магазин и каждый раз покупает один пакет. Какова вероятность p , что при одном визите в магазин он купит пакет, весящий меньше фунта?

Допустим, что в первый раз он обнаружит «недовес» при K -м визите. Выразите $P(K=k)$ для $k=1, 2, \dots$ через p , а затем найдите математическое ожидание этого события. Предполагая, что инспектор покупает один пакет из двухсот, найдите ожидаемое число пакетов, проданных торговцем до этого, а отсюда получите ожидаемое число пакетов, проданных с «недовесом». (Считайте при этом, что 1 кг = 2,2 фунта. Можете также пользоваться тем, что $1 + 2\theta + 3\theta^2 + \dots = (1-\theta)^{-2}$ при $|\theta| < 1$.)

12. Установите точные предположения, при которых число случаев данного заболевания в некоторой группе населения хорошо описывается распределением Пуассона.

В некотором избирательном округе S вблизи от ядерной установки наблюдались четыре случая редкого заболевания. По средним данным национальной статистики, было подсчитано, что число X случаев в округе S_1 имеет математическое ожидание $\lambda = 0,25$.

Полагая, что X распределено по Пуассону с ожиданием $\lambda = 1/4$, вычислите $P(X=4)$ и $P(X \geq 4)$. Какая-нибудь из этих вероятностей свидетельствует о том, что риск в S_1 выше среднего? Коротко объясните ваши доводы.

Предположим, что медицинский статистик может разделить регион, содержащий S_1 , на n субрегионов S_1, S_2, \dots, S_n таким образом, что в каждом из них ожидаемое число случаев было бы равно λ — тому же значению, что в среднем по стране.

Полагая, что средняя частота действительно отражает риск заболевания, вычислите вероятность того, что по крайней мере в одном из субрегионов будет по меньшей мере 4 случая заболевания при $n=225$. Повторите вычисления для $n=23\ 900$ (числа, описывающего всю Англию и Уэльс). Объясните значение обнаруженных 4-х случаев в избирательном округе S_1 .

Группа Г

13. Докажите следующие неравенства (x, y и z — произвольные положительные действительные числа):

а) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;

б) $\min(1, x^3, y^3, z^3) \leq xyz$, где $\min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ означает наименьшее из чисел a_1, a_2, \dots, a_n ;

в) $x \ln x \geq -e^{-1}$.

14. а) Функция $f(x)$ равна 1 для $0 \leq x \leq 1$, равна $1/2$ при $1 < x \leq 2$, вообще равна $1/n$ при $n-1 < x \leq n$, $n=3, 4, \dots$. Постройте на одном чертеже графики функции $f(x)$ при $x \geq 0$ и $y = \frac{1}{x}$ при $x > 0$.

б)*) Получите из графиков, что

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \leq \ln m \text{ для целых } m \geq 2.$$

в) Аналогично докажите, что

$$\ln m \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} \text{ для целых } m \geq 2.$$

г) Замените $1/x$ другой функцией и примените аналогичный метод для доказательства

*) Сравните с решением задачи М1110 («Квант» № 11—12, 1988).

неравенств

$$\ln(m-1)! \leq \min m - m + 1 \leq \ln m!$$

для любого целого $m \geq 2$.

15. Пусть m — натуральное число.

а) Докажите, что биномиальный коэффициент C_{2m}^m удовлетворяет неравенству $C_{2m}^m \leq 4^m$. Ука з а н и е: рассмотрите бином $(1+1)^{2m}$.

б) Используйте формулу

$$C_{2m}^m = \frac{2m(2m-1) \dots (2m-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m},$$

докажите, что C_{2m}^m делится на каждое простое число p , такое что $m < p \leq 2m$.

в) Используйте пункты а) и б) для доказательства неравенства $p < 4^m$, где p — произведение всех простых чисел, для которых $m < p \leq 2m$.

г) Докажите, что если m является степенью двойки, то $Q_m \leq 4^m$, где Q_m — произведение всех простых чисел $p \leq m$. Ука з а н и е: используйте пункт в) для оценки сверху отношения Q_{2m}/Q_m .

16. Буквами, a, b, c, d обозначены 4 различных натуральных числа, ни одно из которых не равно 1. Рассмотрите следующие утверждения:

а) $b = a + 7$ и $b < c < d$;

б) $ab = cd$;

в) a и b — простые числа;

г) b делит a .

Докажите, что лишь два из этих утверждений могут быть справедливы одновременно.

Редакция благодарит чл.-корр. АН СССР В. И. Арнольда, любезно предоставившего этот материал.

Публикацию подготовил А. А. Егоров

Нам пишут

Еще раз о золотом сечении

Золотым сечением называется число $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Это число издавна интересует не только математиков, но и художников, скульпторов, архитекторов. Считается, что золотому сечению подчиняются пропорции хорошо сложенного человека.

Если группе людей предложить выбрать самый гармоничный из большого набора прямоугольников, большинство выберет тот, стороны которого относятся как φ .

Известны две красивые формулы для золотого сечения:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}};$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Наши читатели А. М. и В. М. Соломины из Кисева предлагают еще две формулы, которые мы предлагаем доказать вам:

$$\varphi = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \dots}}}};$$

$$\varphi = 2 - \frac{1}{2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2 + \dots}}}$$

XII Турнир юных физиков

Турнир проводится с сентября 1989 г. по февраль 1990 г. в четыре этапа:

I. Заочный коллективный конкурс (сентябрь—ноябрь 1989 г.).

Задания заочного коллективного конкурса напечатаны в этой статье и в специальной брошюре, которая разослана во все областные и республиканские отделы народного образования (или Министерства народного образования союзных республик), в обкомы и в ЦК ЛКСМ союзных республик.

Принять участие в заочном конкурсе ТЮФ-XII может любой коллектив школьников.

Решения задач заочного конкурса необходимо отправить не позднее 15 ноября 1989 г. по адресу: 119899, Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, Оргкомитет ТЮФ-XII. В конверт вложите анкету, в которой укажите:

1. Почтовый адрес и телефон школы, фамилию, имя, отчество руководителя команды.

2. Список авторов решений (имена пишите полностью).

Решение каждой задачи оформляйте отдельно. В начале решения каждой задачи обязательно укажите город, номер школы, фамилии авторов решения. К экспериментальным задачам приложите подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Рукописи, присланные в Оргкомитет, не возвращаются.

II. Городские, областные и республиканские турниры юных физиков (декабрь 1989 г.).

Московский ТЮФ-XII будет проведен физическим факультетом МГУ для школ Москвы и Московской области по заданиям заочного коллективного конкурса в ноябре—декабре 1989 г.

Турниры юных физиков в других городах, областях и республиках проводятся местными Оргкомитетами или инициативными группами. Физический факультет МГУ готов оказать организационную и методическую помощь в проведении таких турниров.

III. Всесоюзный турнир юных физиков (январь 1990 г.).

Будет проведен по заданиям заочного коллективного конкурса с дополнениями и разъяснениями, которые будут разосланы участникам Турнира в декабре 1989 г. Заявки на участие во Всесоюзном турнире юных физиков следует присылать по вышеуказанному адресу не позднее 15 ноября 1989 г.

IV. Международный турнир юных физиков.

Будет проведен с 26 февраля по 3 марта 1990 г. в городе Кладно (ЧССР). В нем примет участие команда СССР в составе 5 школьников.

Задания заочного коллективного конкурса ТЮФ-XII

*Не станет он искать побед.
Он ждет, чтоб высшее начало
Его все чаще побеждало,
Чтобы расти ему в ответ.*

Р. М. Рильке

1. «Придумай сам» — физический фотоконкурс. Представьте на конкурс фотографии быстротекающего физического процесса. В пояснениях к фотографиям раскройте их физическую ценность.

2—4. «Шарик и поршень». Горизонтальный поршень колеблется вверх-вниз. Координата поверхности поршня определяется выражением $x = x_0 \cos \omega t$. В произвольный момент времени на поршень роняют без начальной скорости с высоты H маленький шарик (рис. 1).

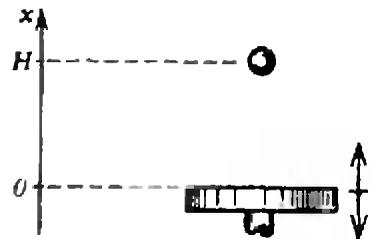


Рис. 1.

2. На какую высоту отскочит шарик после первого соударения с поршнем? В этом случае считайте, что соударение абсолютно упругое и $H > x_0$.

3. После большого числа соударений система «забудет» начальные условия. Оцените, на какую максимальную высоту может отскочить шарик после многих соударений. Какова будет средняя высота отскока? Считайте, что при соударениях не происходит разрушения поверхностей шарика и поршня.

4. Пусть теперь на некоторой высоте H над поршнем находится потолок. В этом случае возможны стационарные решения. Отыщите некоторые из них и исследуйте их устойчивость. Для численных оценок считайте, что $H = 1$ м, $H \gg x_0$, $g = 10$ м/с² и что при соударениях шарика

с поршнем и с потолком коэффициент восстановления $k=0,8$.

5. «Планета». Каким может быть максимальный размер планеты, имеющей форму куба?

6. «Испарение — конденсация». В П-образной запаянной стеклянной трубке находится вода (рис. 2).

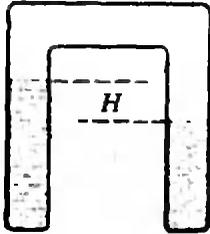


Рис. 2.

Если первоначально в коленях трубки установить некоторую разность уровней H , то со временем уровни воды в коленях выровняются. Оцените скорость выравнивания при данных H и температуре $T = \text{const}$.

а) В трубке нет воздуха.

б) В трубке есть воздух при нормальном давлении.

7. «Цилиндр в трубе». В длинной трубке, заполненной водой, движется с постоянной скоростью по направлению к закрытому концу цилиндр (рис. 3).



Рис. 3.

Внутренний диаметр трубки D , диаметр цилиндра d , длина цилиндра L , $D-d=h$, $L>D$, $h\ll D$. Как зависит сила сопротивления движению цилиндра от скорости цилиндра? Сравните теоретические оценки с результатами эксперимента.

8. «Сегнерово колесо». Сегнерово колесо, поме-

щенное в воду, вращается за счет реактивной силы струй, вытекающих из сопел. Будет ли вращаться такое колесо в обратном режиме, т. е. если вода не вытекает, а втекает (всасывается) в сопла колеса?

Рекомендуем обратиться к книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» (частичный перевод в журнале «Наука и жизнь», 1986, № 12).

9. «Колесо Франклина». Вращение металлической вертушки с острями в известном опыте «колесо Франклина» объясняется наличием «электрического ветра». Объясните, почему вращается эта вертушка, если ее поместить между пластинами плоского конденсатора и заряжать конденсатор от электрофорной машины. Будет ли вращаться диэлектрический диск, помещенный вместо колеса Франклина между пластинами плоского конденсатора, заряжаемого от электрофорной машины?

10. «Электрет». 150 лет назад М. Фарадей предсказал электреты как электростатические аналоги постоянного магнита. Изготовьте электрет и исследуйте его свойства.

11. «Цвета облаков». Тучки небесные, вечные странники! Степь лазурною, цепью жемужною Мчитесь вы...

М. Ю. Лермонтов
Объясните наблюдаемые цвета облаков и туч.

12. «Граница облака». Наблюдаемая граница облака часто бывает резко очерчена. Особенно хорошо это можно видеть с борта самолета. Оцените «размытость» границы облака.

13. «Облако космонавтов» (фантазия с физи-

ческим смыслом). Большое число космонавтов образуют в открытом космосе «облако космонавтов». Первоначально каждый из них имеет при себе футбольный мяч. С какого-то момента времени космонавты начинают перебрасываться друг с другом этими мячами (при этом ни один мяч не теряется). Опишите эволюцию «облака космонавтов». Не желая ограничивать вашей фантазии, предоставляем вам самим выбор начальных условий, правил переброски мячей и других параметров «облака». Важно только следующее: выбор модели должен быть логически обоснован; выводы должны быть подкреплены количественными оценками; количество описанных вами вариантов не должно быть более двух.

14. «Фрактал?». Бабушка сматывает шерстяную нить в сферический клубок. Как зависит масса клубка от его диаметра?

15. «Свет в трубе». Посмотрите на свет через стеклянную трубку (диаметр трубки ≈ 5 мм, длина ≈ 25 см). Объясните происхождение наблюдаемых колец.

16. «Интерференция». Возьмите две хорошо отмытые от эмульсии стеклянные фотопластинки (9×12 см). Если их плотно прижать друг к другу (притереть), то в отраженном свете можно увидеть интерференционные полосы. Если положить пластинки на стол и надавить пальцем на середину верхней пластинки, то полосы приобретают вид концентрических колец. Если палец убрать, то кольца начнут «разбегаться». Прodelайте этот опыт и объясните наблюдаемые явления. Оцените теоретически скорость «разбега-

ния» колец после снятия нагрузки.

17. «Научная организация труда — НОТ». Вам предстоит забить 1989 одинаковых гвоздей ($l=50$ мм, $\varnothing=2,5$ мм) в деревянный брус. Какой молоток вы выберете для скорейшего и качественного выполнения этой работы? (Более определенно — какова масса молотка и длина его ручки?)

а) Брус сосновый.

б) Брус дубовый.

Задания подготовили:

С. Д. Варламов, Т. П. Корнеева, А. Ю. Кусенко, М. Ю. Николаев, А. В. Рахманов, М. В. Столяров, М. М. Цыпин, Е. Н. Юносов.

Участникам и организаторам Турниров

В настоящее время Турнирам юных в нашей стране предоставлены широкие возможности. Госкомитет СССР по народному образованию и ЦК ВЛКСМ приняли постановление «О развитии турнирной формы работы со школьниками» от 09.12.88 г. На основании этого постанов-

ления в 1989 году уже проведены: II Всесоюзный и Международный турнир юных физиков, Всесоюзные зимняя и летняя школы для участников и организаторов Турниров. В августе 1989 г. в Уфе состоится Всесоюзная летняя школа-сессия, на которой впервые будут проведены Турниры юных химиков, математиков, геологов и юных исследователей космоса. Однако для широкого распространения и развития Турниров директивных указаний мало. Необходимо, чтобы в активную, конкретную работу включились творческие коллективы организаторов Турниров в различных регионах нашей страны. Такими коллективами могут стать инициативные группы студентов, учителей, работников просвещения, преподавателей вузов, комитетов комсомола школ, научных учреждений и вузов, школьников старших классов. Организаторы Турниров юных могут рассчитывать на помощь органов народного образова-

ния, обкомов комсомола и ЦК ЛКСМ республик.

В октябре 1989 г. в Одессе будет проведен Всесоюзный семинар для организаторов Турниров. В нем примут участие представители коллективов тех регионов, где уже имеется опыт проведения Турниров (среди них: Москва, Одесса, Уфа, Томск, Новосибирск, Краснодар, Красноярск), а также коллективов, которые включаются в эту работу. Заявки на участие в семинаре следует присылать по адресу: Москва, ЦК ВЛКСМ, отдел учащейся молодежи, ТЮФ или по адресу Оргкомитета ТЮФ.

Советы участникам и организаторам Турнира напечатаны в журнале «Квант» № 8 за 1986, 1987 и 1988 г. Оргкомитет ТЮФ по вашему запросу вышлет вам очередную брошюру о Турнире.

Желаем всем будущим участникам и организаторам Турниров удачи и творческих успехов!

*Зам. председателя Оргкомитета
Е. Н. Юносов*

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в вечернее время в форме лекций,

читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными направлениями современной физики. Для желающих организованы факультативные занятия по математике и основам информатики.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 26 сентября. Для поступления в школу необходимо

лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (и приложить две фотокарточки размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 6 по 22 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Адрес: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 939-26-56.

Ответы, указания, решения

Обязательные приложения периодических дробей

1. Доказательство леммы. Для каждого натурального n , не делящегося на q , вычислим остаток от деления числа pn на q . Пусть r — наименьший из этих остатков; в частности, $Ar = Bq + r$ при некоторых A и B . Нам нужно показать, что $r = 1$. Предположим, что $r > 1$, и поделим q на r с остатком: $q = mr + r'$, $r' < r$ (и $r' > 0$, ибо в противном случае p и q оба делились бы на r и не были бы взаимно просты). Тогда $A(m+1)p = B(m+1)q + mr + r' + r = B(m+1)q + q + (r-r')$, откуда видно, что остаток от деления числа $A(m+1)p$ на q равен $r-r' < r$, что противоречит минимальности остатка r . Лемма доказана.

Заметим, что в доказанной лемме обязательно A взаимно просто с q , а B взаимно просто с p .

Вывод утверждения из леммы. Пусть $2^{2^5}A = Bm' + 1$. Тогда

$$\frac{1}{m} = \frac{2^{2^5}A - Bm'}{2^{2^5}m'} = \frac{A}{m'} - \frac{B}{2^{2^5}}$$

В последней разности уменьшаемое есть десятичная дробь, имеющая период такой же длины, как $1/m'$ (см. упражнение 2), а вычитаемое есть конечная десятичная дробь с s знаками после запятой (оно равно $2^{2^5}B/10^s$ или $5^{2^5}B/10^s$). Отсюда немедленно следует наше утверждение.

2. При умножении десятичной дроби $1/q$ на p ее период мог бы только уменьшиться. Предположим, что он уменьшился. Пусть A и B такие, что $Ar = Bq + 1$. При умножении дроби p/q на A период может только еще уменьшиться. Но при этом умножении получается $(Bq+1)/q = B + (1/q)$ — период имеет такую же длину, как у исходной дроби. Противоречие.

3. Можно считать дробь несократимой. Если q не делится на 2 и на 5, то это прямо вытекает из следствия, доказанного в статье (и, если угодно, упражнения 2). Если делится, то поделим q на все возможные двойки и пятёрки; пусть получится q' . В силу формулы, доказанной выше при решении упражнения 1, наша дробь имеет такой же период, как некоторая дробь со знаменателем q' .

4. Пусть n_1 — наименьшее число девяток, составляющих число, делящееся на p_1 , а n_2 — наименьшее число девяток, составляющих число, делящееся на p_2 . Пусть, далее, n — наименьшее общее кратное чисел n_1 и n_2 . Мы должны доказать, что, во-первых, число из n девяток делится на $p_1 p_2$ и, во-вторых, никакое число, составленное из меньшего количества девяток, на $p_1 p_2$ не делится. Но первое очевидно, а второе доказывается точно так же, как теорема 2 статьи.

5. 1012658227848, 1139240506329. Это — периоды дробей $8/79$ и $9/79$; при перенесении последней цифры в начало оба увеличиваются в 8 раз.

6. Пусть p — полнопериодное простое число. Период дроби $1/p$ равен $(10^{p-1} - 1)/p$. Возведем его в квадрат и отделим последние $p-1$ цифр:

$$\left(\frac{10^{p-1} - 1}{p}\right)^2 = A \cdot 10^{p-1} + B, \quad B < 10^{p-1}.$$

Имеем

$$A + B = \frac{10^{p-1} - 1}{p} \left(\frac{10^{p-1} - 1}{p} - Ap\right).$$

Таким образом, $A + B$ делится на период дроби $1/p$. Легко понять, что частное не превосходит p (доказательство мы оставляем читателю), причем оно равно p в том и только в том случае, если период дроби $1/p$ сам делится на p ; бывает ли такое для полнопериодных p , мы не знаем. В этом случае $A + B$ равнялось бы $10^{p-1} - 1$. Если же частное меньше p , то $A + B$ получается из периода круговой перестановкой цифр.

Задача

Число монет равно сумме геометрической прогрессии:

$$n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{17}.$$

Чтобы найти n , запишем:

$$2n = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{17} + 2^{18}.$$

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$n = 2^{18} - 1 = 262\,143.$$

Эффективность в цепи постоянного тока

- $U = \mathcal{E}R / (R + r)$; $P_{\text{внут}} = \mathcal{E}^2 r / (R + r)^2$; см. рис. 1.
- $P_{\text{внут}} = I^2 r$; см. рис. 2.
- $P_{\text{внут}} = \mathcal{E}^2 r / (R + r)^2$; см. рис. 3.
- $P_{\text{потр}} = (U^2 - U\mathcal{E})/r$; $P_{\text{подз}} = (U\mathcal{E} - \mathcal{E}^2)/r$; $P_T = (U - \mathcal{E})^2 / r$; $\eta = \mathcal{E}/U$; см. рис. 4.

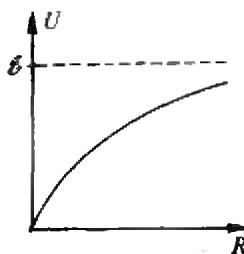


Рис. 1

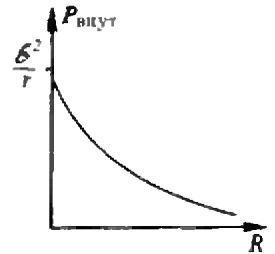


Рис. 2

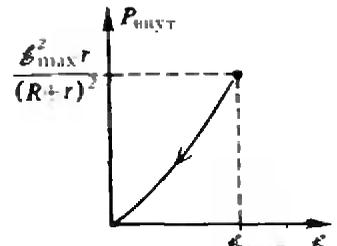


Рис. 3.

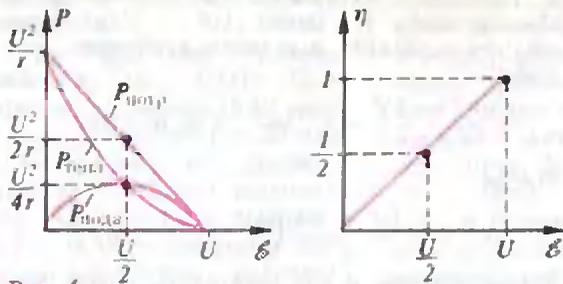


Рис. 4.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

2. Длина Слоненка — 11 Попугаев, Верблюжонка — 9 Попугаев, Теленка — 8 Попугаев, Мартышки — 6 Попугаев, Котенка — 3 Попугая.

3. Указанное равенство следует из того, что $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ и $a^3 + c^3 = (a + c) \times (a^2 - ac + c^2) = (a + c)(a^2 - a(a + b) + (a + b)^2) = (a + c)(a^2 + ab + b^2)$.

4. Таких наборов монет два: (2, 2, 3, 3), (1, 3, 3, 3), (1, 1, 3, 5), (1, 2, 2, 5) — в сумме получается 40 копеек; и (2, 2, 2, 2), (1, 2, 2, 3), (1, 1, 3, 3), (1, 1, 1, 5) — в сумме получается 32 копейки.

5. См. рис. 5.

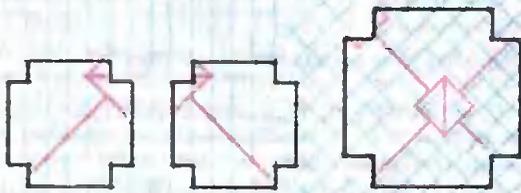


Рис. 5.



Рис. 6.

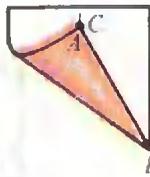


Рис. 7.

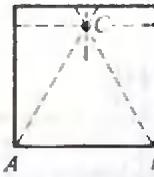


Рис. 8.

4-я с. обложки

(см. «Квант» № 7)

Для построения сети сгибов, позволяющих сложить из бумажного квадрата правильный тетраэдр, главное — построить правильный треугольник ABC на стороне AB квадрата. Для этого листок перегибается пополам и разгибается так, чтобы наметилась часть линии сгиба (рис. 6). Затем вершина A помещается на эту линию так, чтобы край AB листа плотно прилегал к плоскости листа (рис. 7). Точка линии сгиба, на которую попадает эта вершина, и есть точка C . Прижав угол A в точке C , отгибаем верхнюю часть квадрата по линии, проходящей через C параллельно основаниям. Тем самым будет намечена точка C (рис. 8), после чего листок сгибается по линиям BC и AC .

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин,
Б. В. Гнеденко, П. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцева, А. А. Леонович,
С. П. Новикова, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Соснинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:

А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Великов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, А. Л. Стасенко,
И. К. Суриц, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. П. Яковлев

Номер подготовили:

А. И. Буздин, А. Н. Вилеккин, А. А. Егоров,
Л. В. Кардасевич, И. Н. Клаумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:

М. Б. Дубяк, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина,
Э. В. Назаров, С. Ф. Лухин, И. Е. Смирнова,
П. И. Чернуцкий, О. И. Эстес, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления

С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Д. В. Чернова

Корректор В. И. Сорочкина

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.05.89. Подписано к печати 20.07.89
Т-12605. Формат 70×100/16. Бумга офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр. отт. 27,09. Уч. изд. л. 7,83. Тираж 133 306 экз.
Заказ 1183. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ВОСЬМОЙ ЧЕМПИОНАТ МИРА СРЕДИ МИКРОКОМПЬЮТЕРОВ

Восьмой чемпионат мира среди шахматных микрокомпьютеров состоялся в испанском городе Альмерия. Напомним, что в трех первых чемпионатах побеждал «Фиделити», а в четырех последующих — «Мефисто». И вот давние соперники встретились в двухкруговом матче-турнире, чтобы выяснить свои отношения. Сражение между квартетами «Фиделити» и «Мефисто» завершилось победой «Мефисто» со счетом 19:13. Таким образом, эти компьютеры уже в пятый раз подряд доказали, что они — сильнейшие в мире. «Фиделити» довольствовались тем, что одна из их побед над «Мефисто» была признана лучшей партией чемпионата.

Все «Фиделити» и «Мефисто», участвовавшие в матче-турнире, были экспериментальными, т. е. специально подготовленными для чемпионата мира в Испании. Однако помимо центральной битвы за корону в Альмерии состоялись еще два турнира, привлекавшие большое внимание. Первый — в классе коммерческих компьютеров (поступающих в продажу), здесь также победил «Мефисто». Второй — шахматных программ для персональных компьютеров. Участвовали 7 программ, победила «Альмерия-Х», набравшая шесть очков из шести. Ее автором является Ричард Лэнг, создатель программы для «Мефисто».

Были ли творческие достижения на этом чемпионате? Как обычно, в тактической игре машины действовали довольно уверенно, а в эндшпиле иногда «творили чудеса».

«Мефисто-3» — «Фиделити-1»

Защита Нимцовича

1. d4 Kf6 2. c4 e6 3. Kf3 b6 4. Kc3 Cb4 5. Фb3 Ка6 6. Сg5 Сb7 7. 0—0—0. В данном дебюте редко рокируют в длинную сторону. В дальнейшем черные успешно используют ослабленное положение белого

короля. 7...С:c3 8. Ф:c3 Ке4 9. Фе3 К:g5 10. К:g5 Фf6 11. Фg3 h6 12. Kf3 Ce4 13. a3 e5 14. e3 cd 15. К:d4 Кc5 16. f3 Ch7 17. e4 0—0 18. e5 Фе7 19. f4 f6 20. Фе3 fe 21. fe Фb4 22. g3 Фh5 23. Сg2 Лас8 24. Лd2 Фg6.

Черные наконец реализовали свою идею — ввели в бой против неприятельского короля дальнбойную батарею. Белый предводитель вынужден идти в центр доски, где его ждут одни неприятности. 25. Kpd1 Лf7 26. b3 Лcf8 27. Kpe2 Фh5+ 28. Kpe1 Лf2! 29. Ф:f2 Kd3+ 30. J:d3 J:f2 31. Kp:f2 C:d3 32. Je1. Перевес черных беспорен, и они шаг за шагом расширяют позицию белых. 32...Фf7+ 33. Cf3 Фf8 34. Ле3 Сb1 35. Kb5 Фc5 36. Ce2 a6 37. b4 Фc6 38. Kd6 Фh1 39. h4 Фh2+ 40. Kpf1 Kph7 41. Кс8 Фh1+ 42. Kpf2 Фc6 43. Kd6 a5 44. Cd1 Фh1 45. Ca4 Фh2+ 46. Kpf3 Фg1 47. Kpe2 Фg2+ 48. Kpe1 Cc2 49. C:d7 Фg1+ 50. Kpe2 Фd1+ 51. Kpf2 Cd3 52. g4 Фf1+ 53. Kpg3 g5 54. hg hg 55. Jf3 Фg1+ 56. Kph3 Cf1+ 57. J:f1 Ф:f1+ 58. Kpg3 Фf4+ 59. Kpg2 Ф:g4+ 60. Kpf2 Фd4+ 61. Kpf1 Ф:e5 62. c5 Фa1+ 63. Kpg2 Фb2+ 64. Kpf3 Ф:a3+ 65. Kpe4 Ф:b4+ 66. Kpe5 Ф:c5+. Белые сдались.

«И! — 88» — «Дашпет»

Сицилианская защита

Дебютная библиотека современных шахматных компьютеров довольно богата, но в этой партии, похоже, побиты все рекорды. Обе машины до 17-го хода повторяли партию двух знаменитых гроссмейстеров: Карпов — Андерссон (Турин, 1982 г.).

1. e4 e5 2. Kf3 d6 3. d4 cd 4. К:d4 Kf6 5. Кc3 e6 6. g4 h6 7. Jg1 Ке6 8. Ce3 Ce7 9. Фе2 К:d4 10. C:d4 e5 11. Ce3 Ce6 12. 0—0—0 Kd7 13. Kpb1 a6 14. f4 ef 15. C:f4 Cf6 16. Фе3 Ce5 17. C:e5 de. Только сейчас машины отошли от первоисточника. Андерссон взял на e5 конем, и после 17...К:e5 18. Ce2 Лс8 19. Kd5 Лс6 20. c3 C:d5 21. J:d5 Карпов получил лучшие шансы. Правда, в конце концов

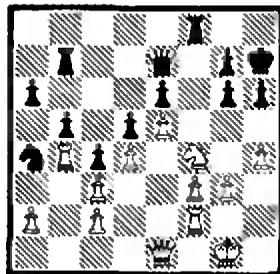
встреча завершилась вничью. «Новинка» компьютера позволяет черным уравнивать шансы.

18. Ce2 Фh4 19. Фg3 Ф:g3 20. J:g3 0—0—0 21. Jf1 Kf6 22. Лd3 Лhe8 23. h3 Лd4 24. Kpe1.

Позиция черных совершенно безопасна, но их увлекает комбинация, которая, как выясняется, содержит изъян.

24...К:e4? 25. J:d4 К:c3. Как будто черные выигрывают пешку: 26. bc ed 27. cd C:a2 или 26. Лd2 К:e2+ 27. Л:e2 Cc4. Но у белых находится контркомбинация.

26. Jc4+! Неожиданный промежуточный ход. 26...C:c4 27. C:c4 Ке4 28. C:f7. Материальное равновесие восстановлено, но белый слон значительно превосходит черного коня. 28... Ле7 29. Сb3 b5 30. Je1 Кc5 31. Cd5 g6 32. b4 Ка4 33. Ле3 Кb6 34. Лc3+ Kpb8 35. Ce4 Ле6 36. Лf3 g5 37. Лf8+ Kpc7 38. Лf7+ Kpd8 39. Ла7 Кс8 40. Ла8 Kpc7 41. Cf5 Ле8 42. C:c8 Л:c8. Позиционный перевес белых трансформировался в выигранный ладейный эндшпиль. 43. J:a6 Jf8 44. J:h6 Jf1+ 45. Kpd2 Лf3 46. Ле6 J:h3 47. Л:e5 Лh2+ 48. Kpc3 Kpb6 49. Л:g5, и вскоре черные сдались.



«Челленджер» — «Альмерия-Х»

Лучшая программа чемпионата мира осуществляет позиционную жертву качества и перехватывает инициативу. 44...J:f4! 45. gf Ф:h4 46. Фе3 Лf7 47. Kpg2 Лf5 48. Фе1 Лh5 49. Kpf1 Ф:f4 50. Kpe2 Фf5 51. Kpd2 Лh3 52. Фе3 Лh1 53. Jg2 Ла1 54. f4 J:a2 55. Kpe1 Ла1+ 56. Kpd2 К:c3! 57. Kp:c3 Ла3+ 58. Лb3 cb 59. cb Ла1. В дальнейшем черные с тремя лишними пешками легко взяли верх.

Е. Я. Гук

А Чер 11-15

В прошлом номере мы рассказали, как из бумажного квадрата сложить правильный тетраэдр, а сейчас познакомимся с моделью октаэдра. Обе эти модели придуманы профессором биологии К. Хага из университета Цукуба и заимствованы нами из книги «Оригами для знатоков», (Токио, 1985).
 Снова все начинается с разметки квадрата (рис. 1), а точнее с построения правильного треугольника $A_1B_1A_3$, вписанного в квадрат (это объясняется в разделе «Ответы» этого номера). Красные линии на рисунках — это сгибы-хребты, синие — сгибы-ущелья. Точки $A_1 - A_4$ в конце сборки попадут в одну вершину A октаэдра, B_1 и B_2 — в вершину B и т. д. По ходу складывания направления сгибов могут отличаться от указанных на рисунке 1, хотя новые линии сгиба не нужны. Будьте внимательны: в конце сборки сгибы и совмещенные точки должны соответствовать

рисунку 1 — это обеспечит прочность модели! Рисунки 1—3, пожалуй, говорят сами за себя. Дальше идет самый тонкий момент сборки — перегибание «язычка» $B_1F_2A_2MQ$ (рис. 3), который на рисунке 4 оказывается как бы в обложке из двух листов, по линии F_2E_1 (синему пунктиру на рисунке 4) внутри этой обложки. При этом точка B_1 совмещается с B_2 , автоматически образуется внутренняя складка по линии FA (рис. 5) и карман для клапана 2. Получившаяся фигура (рис. 5) все еще плоская. Но здесь происходит маленькое чудо: когда мы сдвигаем вместе точки A , эта фигура сама собой раздвигается и превращается в октаэдр с плоским отростком (рис. 6). Остается согнуть отросток по линии AE и вставить клапан 3 в щель AD .

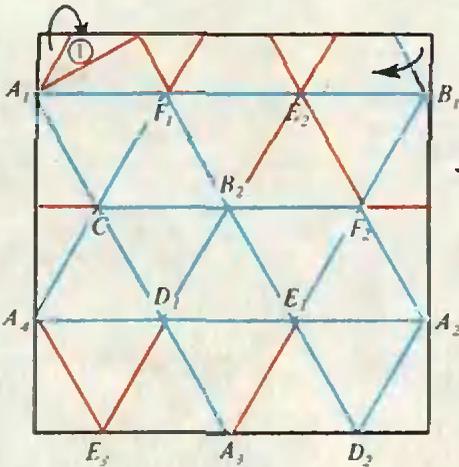


Рис. 1.

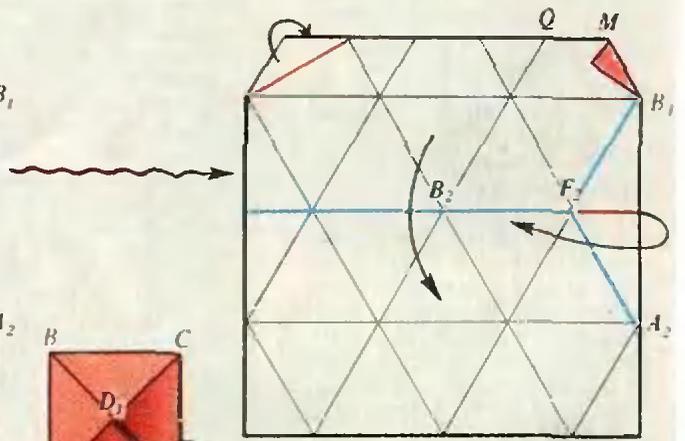
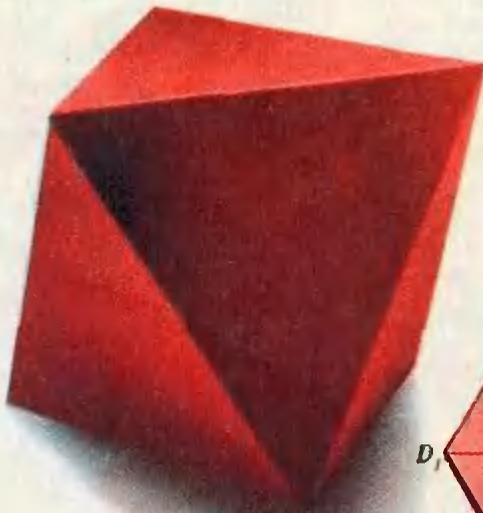


Рис. 2.

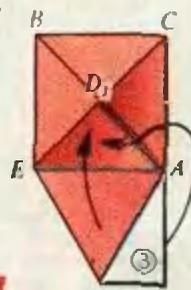


Рис. 3.

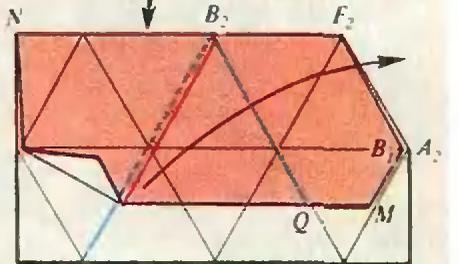


Рис. 4.

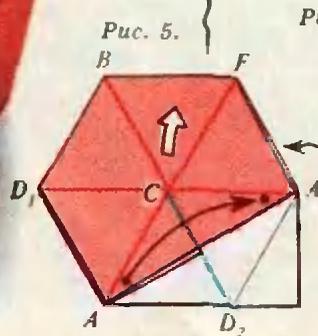


Рис. 5.

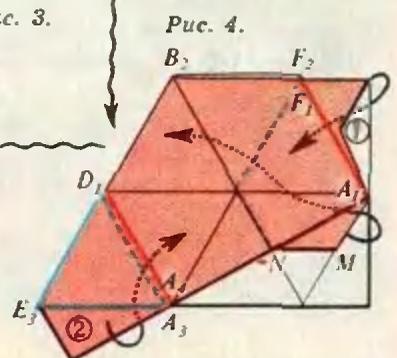


Рис. 6.